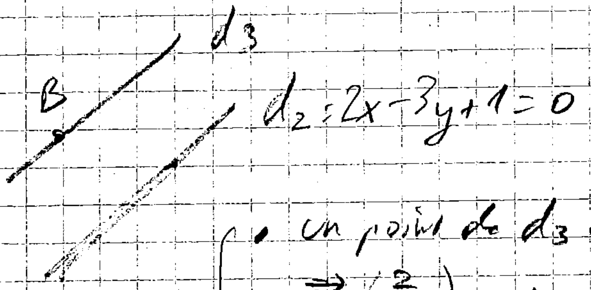
MATH 4N Corrigé SA n°5

EX1 $\frac{1}{14}$

(a) • $A(-5;1) \in d$ connu
• $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ normal à d connu
• $P(x;y) \in d$ inconnu

$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+5\\y-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow 4x+20-3y+3=0$
$\Leftrightarrow \left[4x-3y+23=0\right]$ (3)

(b)

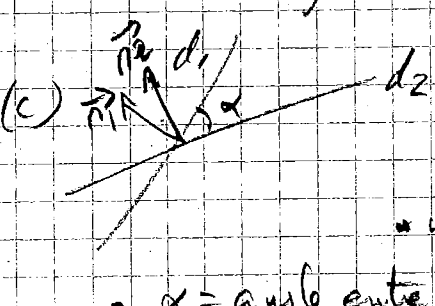


• un point de d_3 : $B(-2;3)$
• $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal à d_2
donc $\vec{n}$ aussi vecteur normal à d_3
• un point $P(x;y) \in d_3$ inconnu

$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow 2x+4-3y+9=0$
$\Leftrightarrow \left[2x-3y+13=0\right]$

OU $d_3 // d_2$ donc éq. de d_3 : $2x-3y+c=0$
$B(-2;3) \in d_3 \Leftrightarrow 2(-2)-3\cdot 3+c=0$
$\Leftrightarrow c=+13$
éq. de d_3 : $\left[2x-3y+13=0\right]$ (4)

(c)

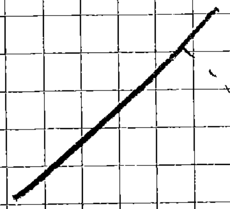


• un vecteur normal à d_1 : $\vec{n}_1\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$
($\Rightarrow$ un vecteur directeur à d_1 $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$)
• un vecteur normal à d_2 : $\vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

• α = angle entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$:

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{25}\sqrt{13}} = \frac{4\cdot 2+(-3)(-3)}{5\sqrt{13}} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{17}{5\sqrt{13}}\right) \cong 19{,}44°$ (4)

(d) 

$d_2 : 2x - 3y = -1$

$\cdot B(-2;3)$ $\quad \delta = \dfrac{|2(-2) - 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{|-12|}{\sqrt{13}} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$

$\cong 3{,}33$ (3)

ex 2 [/27]

(a) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1)

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ (1)

$\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{19} \\ -1/\sqrt{19} \\ 3/\sqrt{19} \end{pmatrix}$ (1)

2e solution : $\vec{w} = -\dfrac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{19} \\ 1/\sqrt{19} \\ -3/\sqrt{19} \end{pmatrix}$ (1)

(b) $-2(-1) + (-2) - 0 \overset{?}{=} 3 \iff 0 \overset{?}{=} 0$ non, $A \notin \pi_2$ (2)

(c) $\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 + 0 + 4 = 14 \neq 0$ donc $\vec{u} \not\perp \vec{v}$ (2)

(d) $\left[\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = +3 + 6 + 3 = 12$ ils ne sont pas coplanaires (3)

(e) $P(x;y;z) \in \pi_1 \iff \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ (3)

$\iff \boxed{4x - 2y + 2z = 0}$

(f) $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal à π_1

$\vec{n_2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal à π_2

$\vec{n} = (-2) \cdot \vec{n_2}$ donc $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ sont colinéaires

donc $\pi_1 \parallel \pi_2$ ou $\pi_1 = \pi_2$

$\pi_1 : 4x - 2y + 2z = 0$

$\pi_2 : -2x + y - z = 3 \quad | \cdot (-2)$

$\iff 4x - 2y + 2z = -6$

les 2 équations ne sont pas équivalentes $\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

(4)

(g) $d(\Pi_1; \Pi_2) = d(A; \Pi_2) = \dfrac{|-2(-1)+(-2)-0-3|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}}$ (3)

$= \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

(h) $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à Π_2, donc directeur de d

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \lambda \vec{n_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -2\lambda \\ y-2 = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \left[\dfrac{x-1}{-2} = y-2 = -z\right]$ (4)

(i) $\dfrac{3-1}{-2} = 1-2 = -1$ donc $D(3;1;-1) \in d$
(par exemple) (2)