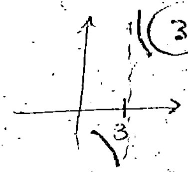
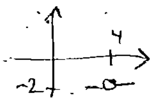
MA4N03 2014 Corrigé travail go n°1 — tot /90 — not /3, fr /2 — /92

ex 1 [/15]



a) type "$\frac{1}{0}$"

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{-9}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{-9}{0^+} = -\infty \quad \Big\} \lim_{x\to 3} f(x) \nexists$$ (3)



b) type "$\frac{0}{0}$" (pol/pol)

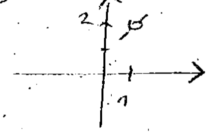
$$\lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(4+x)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}(x+4)}{x\cancel{(x-4)}} = \frac{-8}{4} = -2$$ (3)

c) type "$\frac{0}{0}$" ($\sqrt{\ }$)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{3-\sqrt{12-3x}} \cdot \frac{3+\sqrt{12-3x}}{3+\sqrt{12-3x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{12-3x})}{9-(12-3x)}$$

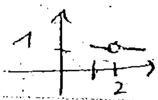
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{12-3x})}{3x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(3+\sqrt{12-3x})}{3\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{9}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$ (4)

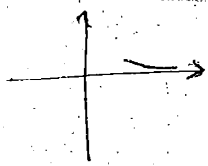


d) type "$\frac{0}{0}$" (trig)

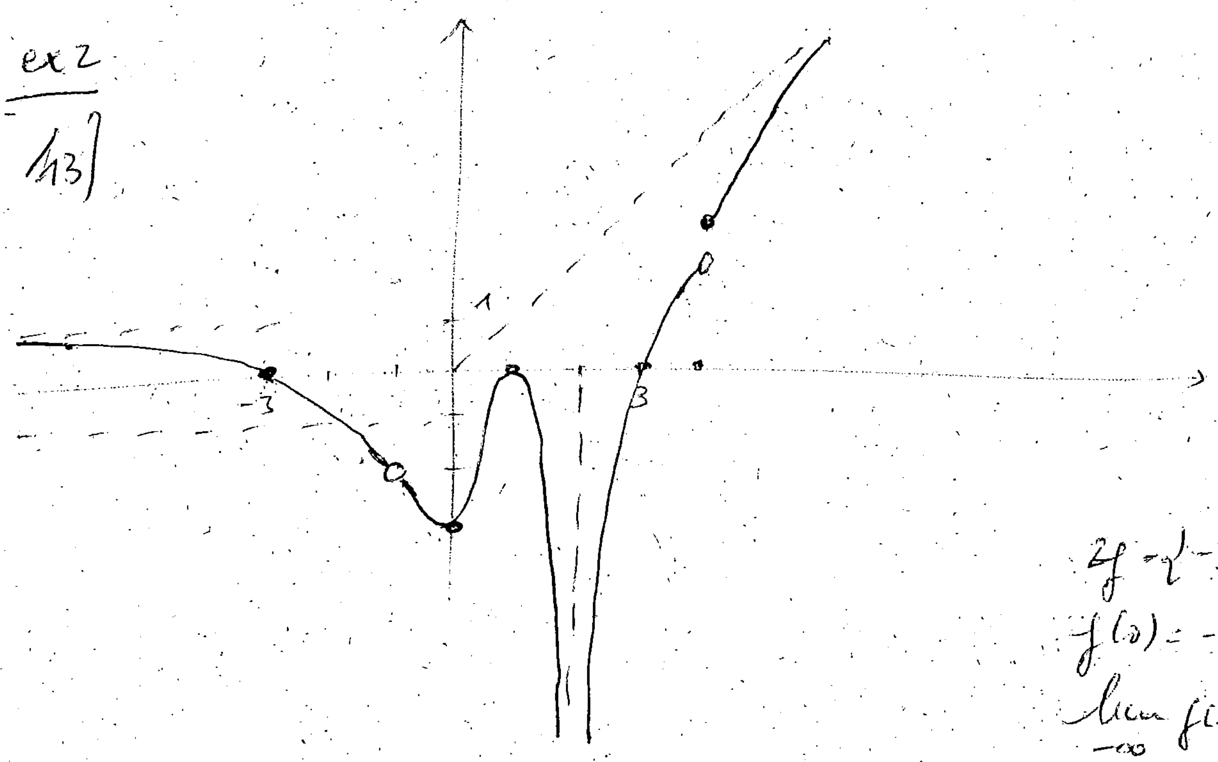
$$\underbrace{\lim_{x\to 2} \cos(x-2)}_{=\cos(0)=1} \cdot \lim_{\substack{x\to 2\\ x-2\to 0}} \frac{\sin(x-2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x-2\to 0} \frac{\sin(x-2)}{x-2}}_{=1} =$$ (3)



e) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{-8}{1-4x^2} = \frac{-8}{1-\infty} = \frac{-8}{-\infty} = 0$$ (2)



ex 2 [/13]



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 3\}$ (2)

$f(0) = -3$ (1)

$\lim_{-\infty} f(x) = -1$ (1)

$y = x$ as. obl. à $+\infty$ (2)

$\lim_{x\to -1} f(x) = 2$ / $f(-1) \nexists$ (2)

$\lim_{x\to 4} f(x) \nexists$ / $f(4) \exists$ (2)

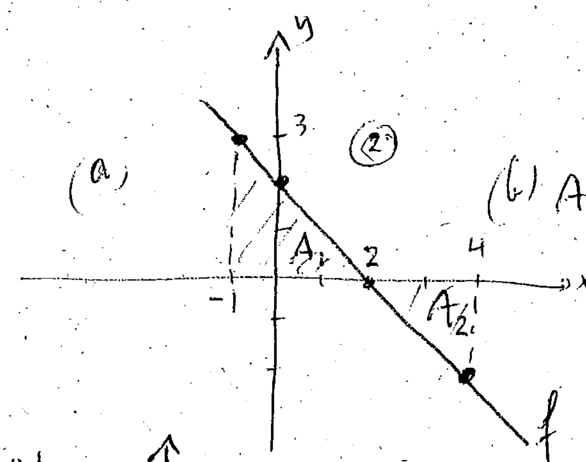
fct (1)

$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ (2)

ex 3

[/12]

1. (a)

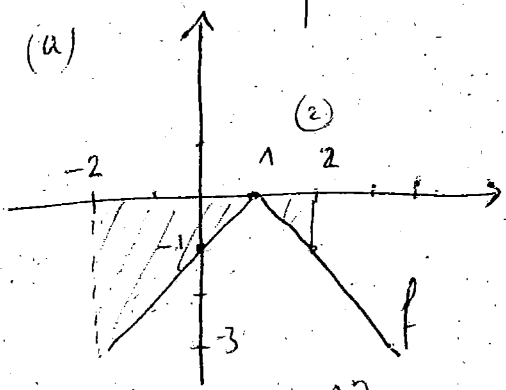


(2)

(b) $A = A_1 + A_2 = \frac{3\cdot 3}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$ (2)

(c) $I = A_1 + [-A_2] = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (2)

2. (a)



(2)

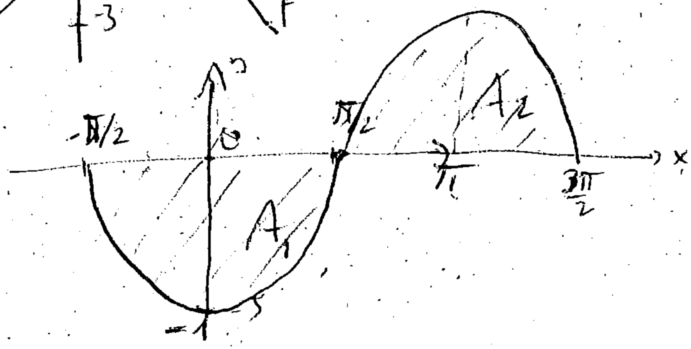
(b) $A = \frac{3\cdot 3}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (2)

(c) $I = -A = -5$ (2)

ex 4

[/8]

(a)



(2)

(b) par symétrie : $I = 0$ (2)

(c) si A_1 était délimitée par un demi-cercle, on aurait $d(O;P) = 1$ pour tout point P de la courbe.
Or, par exemple pour $P = (\pi/2\,;0)$, on a $\delta(O;P) = \frac{\pi}{2} \neq 1$ (4)

(d) $A = A_1 + A_2 = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos(x)\,dx$

$= 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos(x)\,dx = 2\left[-\sin(x)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$

$= 2\left(\left[-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] - \left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right)$

$= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$= 2(1 - (-1))$

$= 2 \cdot 2$

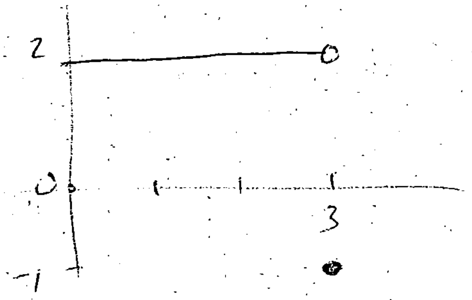
$= 4$

[max+3]

max + 3

ex 5

[/9]



$\Delta x = \frac{3}{n}$

$x_0 = 0$ (1)

$x_1 = \frac{3}{n}$

$x_2 = \frac{6}{n}$

$x_3 = \frac{9}{n}$

$\vdots$

$x_n = n \cdot \frac{3}{n} = n$

$m_1 = 2 \qquad M_1 = 2$

$m_2 = 2 \qquad M_2 = 2$

$\vdots$

$m_{n-1} = 2 \qquad M_{n-1} = 2$ (2)

$m_n = -1 \qquad M_n = 2$

$$\Rightarrow s_n = \underbrace{2 \cdot \frac{3}{n} + 2 \cdot \frac{3}{n} + \cdots + 2 \cdot \frac{3}{n}}_{n-1 \text{ fois}} + (-1) \cdot \frac{3}{n} = (n-1) \cdot 2 \cdot \frac{3}{n} + \frac{-3}{n}$$

$$= \frac{6(n-1)}{n} - \frac{3}{n}$$ (5)

$$= \frac{6n-9}{n}$$

$$S_n = \underbrace{2 \cdot \frac{3}{n} + \cdots + 2 \cdot \frac{3}{n}}_{n \text{ fois}} = \frac{n6}{n} = 6$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n-9}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(6 - \overset{\to 0}{9/n})}{n} = 6$$ (2)

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 6 = 6$$

donc $I = \int_0^3 f(x)\,dx = 6$ (1)

/17

Exercice 6 (environ 16 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [1;2]

On va maintenant déterminer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon exacte.

Compléter les [........] qui manquent :

On considère un partage de [1;2] en n sous-intervalles équidistants.

On donne ci-dessous certains éléments d'un calcul de limite de grande somme de Riemann pour déterminer l'aire de la surface comprise entre une représentation graphique de la fonction f, l'axe [.Oy.] et les droites d'équations y=0, [......x=1.........] et [......x=2........].

Début du calcul

On partage l'intervalle [.....[1;2].....] en n sous-intervalles équidistants de longueur [...$\frac{1}{n}$...] et on note $\Delta x =$ [.......$\frac{1}{n}$.........]

On pose :

$x_0 =$[.......1.........]

$x_1 = 1 + \frac{1}{n}$

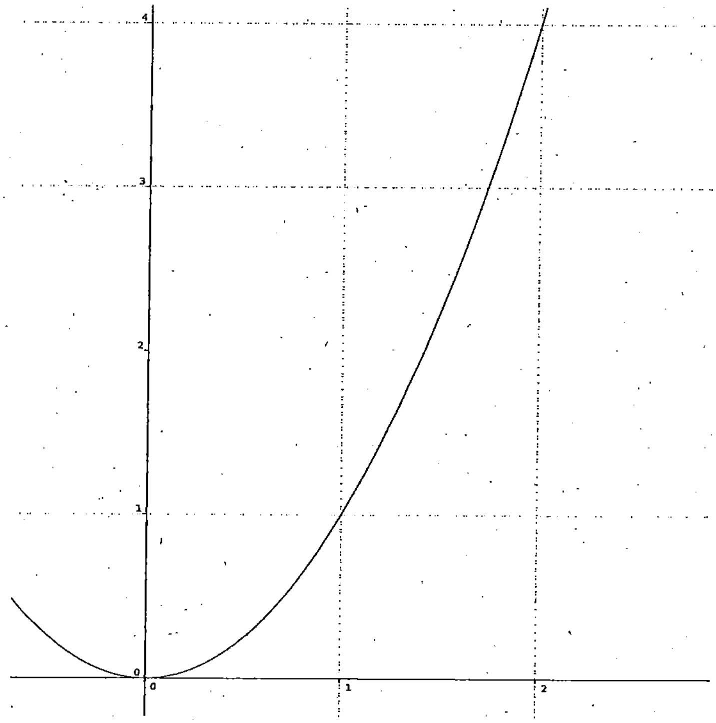
$x_2 =$[$1+2\cdot\frac{1}{n} = 1+\frac{2}{n}$]

$x_3 =$[$1+3\cdot\frac{1}{n} = 1+\frac{3}{n}$]

...

$x_{n-1} =$[$1+(n-1)\cdot\frac{1}{n}$ =] $1+\frac{n-1}{n}$

$x_n =$[$1+n\cdot\frac{1}{n} = 1+1$] $= 2$



On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$S_n = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \Delta x\, f(x_3) + \ldots + [\ldots \Delta x\, f(x_n) \ldots]$$

$$= \Delta x\ ([\ldots f(x_1) + \ldots + f(x_n) \ldots])$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (f([1+\tfrac{1}{n}]) + f(1+\frac{2}{n}) + f([1+\tfrac{3}{n}]) + \ldots + f([1+\tfrac{n}{n}]))$$

14×0,5 = /7

$$= \frac{1}{n}\left(\left([1+\tfrac{1}{n}]\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left([1+\tfrac{3}{n}]\right)^2+\ldots+\left([1+\tfrac{n}{n}]\right)^2\right)$$

$$=$$

$$\frac{1}{n}\left(\left(1^2+2\cdot1\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)+\left(1^2+2\cdot1\cdot\frac{2}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)+\left([1^2+2\cdot1\cdot\tfrac{3}{n}+(\tfrac{3}{n})^2]\right)+\ldots+\left([1^2+2\cdot1\cdot\tfrac{n}{n}+(\tfrac{n}{n})^2]\right)\right)$$

on regroupe dans 3 grandes parenthèses des termes semblables :

$$=$$

$$\frac{1}{n}\left((1^2+1^2+\ldots+1^2)+\left(2\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{2}{n}+[2\cdot\tfrac{3}{n}]+\ldots+[2\cdot\tfrac{n}{n}]\right)+\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+[(\tfrac{3}{n})^2]+\ldots+[(\tfrac{n}{n})^2]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left((n)+\frac{2}{n}([1]+2+\ldots+[n])+\frac{1}{n^2}([1^2]+2^2+\ldots+[n^2])\right)$$

Dans la table numérique, on trouve les formules suivantes :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \frac{1}{n}\left((n)+\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\left(\left[\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right]\right)+\frac{1}{n^2}\left(\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)\right)$$

$$= 1+\frac{n+1}{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n+1}{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= = \lim_{n\to+\infty}[1]+\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{[6n^3]}$$

$$= \left[1+\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}(2+3/n^2+1/n^3)}{\cancel{n^3}\cdot 6}\right]$$

$= [\ldots 1 + 1 + \frac{2}{6} \ldots] = \frac{7}{3}$

On admet qu'on détermine de façon identique la **somme des aires des petits rectangles** de façon identique et qu'on trouve finalement $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{7}{3}$

On avait $s_n < [\ldots A \ldots] < S_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} s_n$ $[\ldots \leqslant \ldots]$ A $[\ldots \leqslant \ldots]$ $\lim_{n\to+\infty} S_n$

C'est-à-dire : $\frac{7}{3} \leqslant A \leqslant [\ldots \frac{7}{3} \ldots]$, donc $\int_1^2 [\ldots f(x) \ldots]\, dx = [\ldots 7/3 \ldots]$ 10 × 1 = /11

/14 Exercice 7 (environ 16 points)

On donne ci-dessous l'énoncé et une démonstration du théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) : relation entre intégrale et dérivée.

Remplir, directement sur l'énoncé, les [.........] et donner les [ARG : ....] demandés :

Enoncé

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction [...continue...] sur $[a;b]$ et $x_0 \in [a;b]$.

On définit une nouvelle fonction F par $F(x) = [\ldots \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \ldots]$ pour $x \in [a;b]$

Alors, on a: F est dérivable et $F'(x) = [\ldots f(x) \ldots]$, $\forall x \in]a;b[$ 4

Démonstration

Cherchons à calculer $\lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, car

[ARG : ...déf de la dérivée pour F(x)...] 1

$$\lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{[\ldots \int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \ldots]}{h},$$ 2

$$= \lim_{h\to o} \frac{[\ldots \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \ldots]}{h},$$ 1

Appliquons le théorème de la moyenne à f sur l'intervalle [. [x ; x+h] .] ; c'est possible, car

[ARG : ...f continue par hyp sur [a ; b] or [x ; x+h] ⊂ [a ; b] donc f continue sur [x ; x+h]...] 2

alors il existe un $c \in [x\,;x+h]$ tel que :

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = [\ldots f(c) \ldots]\cdot(x+h-x) = \ldots = [\ldots f(c) \ldots]\cdot h$$ 1

On a donc :

$$\lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{f(c)\cdot h}{h}$$
$$= \lim_{h\to o} f(c)\text{, car}$$

[ARG : $\frac{h}{h}=1$ car comme $h\to 0$, on est sûr que $h\neq 0$] 2

Or $\lim_{h\to o} f(c)=f(x)$, car

[ARG : f continue par hypothèse sur $[a;b]$,
donc f continue en x
Or la déf de la cont. en a est $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(a)$ *
Enfin $h\to 0$ implique $c\to x$, d'où
$\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$

en substituant dans (*)

$\lim_{h\to 0} f(x)=f(a)$

devient $\lim_{c\to x} f(c) = f(x)$] 4