Travail intermédiaire de mathématiques n°1	
Date : 6 octobre 2014 Durée : 90 minutes Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 4Ma1DF03 **Nom**: .... **Prénom**: .... **Groupe**:	Informations chiffrées après correction du maître Notations (une coche par faute) : Fautes : → .... / .... Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : → .... / .... Total des points des exercices : .... / .... Total des points de l'épreuve : .... / .... Note : / 6
Matériel autorisé o Calculatrice personnelle non graphique et non programmable Remarques o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! o Indiquez vos initiales en haut de chaque page	

Début du travail

Exercice 1 (environ 15 points)

Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les résultats :

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-18}{3-x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{16-x^2}{x^2-4x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{3-\sqrt{12-3x}}$

(d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\cos(x-2)\sin(x-2)}{2x-4}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-8}{1-4x^2}$

Exercice 2 (environ 13 points)

Représenter graphiquement une fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes

Précision : on demande bien une seule fonction qui vérifie toutes les conditions et non une fonction pour chaque condition

(a) L'ensemble Z_f des zéros de f est {-3;1;3}

(b) $f(0)=-3$

(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

(d) f admet $y = x$ comme asymptote oblique à $+\infty$

(e) f n'est pas définie en -1 et $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$

(f) f est définie en 4 et $\lim_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas

(g) $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

Exercice 3 (environ 12 points)

Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous :

1. $f(x) = -x+2, a=-1, b=4$
2. $f(x) = -|x-1|, a=-2, b=2$

(a) la représenter graphiquement (schéma « rapide ») ;

(b) déterminer géométriquement la valeur de l'aire délimitée par l'axe 0x, les droites $x = a$ et $x = b$;

(c) déterminer la valeur de $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Exercice 4 (environ 8 points)

On considère la fonction f et les a et b suivants : $f(x) = -\cos(x), a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{3\pi}{2}$

(a) représenter graphiquement f sur [a;b] (schéma « rapide ») ;

(b) en déduire la valeur de $I = \int_a^b f(x)\,dx$, en donnant une justification graphique ;

(c) démontrer que l'aire délimitée par l'axe 0x, les droites $x = a$ et $x = b$ ne peut pas être considérée comme délimitée par deux demi-cercles ;

(d) Facultatif (max environ + 4 points): déterminer cette aire par la méthode de votre choix.

Exercice 5 (environ 9 points)

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} 2, \text{si } x \in [0;3[\\ -1, \text{si } x = 3 \end{cases}$ et [a;b] = [0;3]. Calculer $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon détaillée à l'aide des petites et grandes sommes de Riemann.

Exercice 6 (environ 16 points)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ sur l'intervalle [1;2]

On va maintenant déterminer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon exacte.

Compléter les [….....] qui manquent :

On considère un partage de [1;2] en n sous-intervalles équidistants.

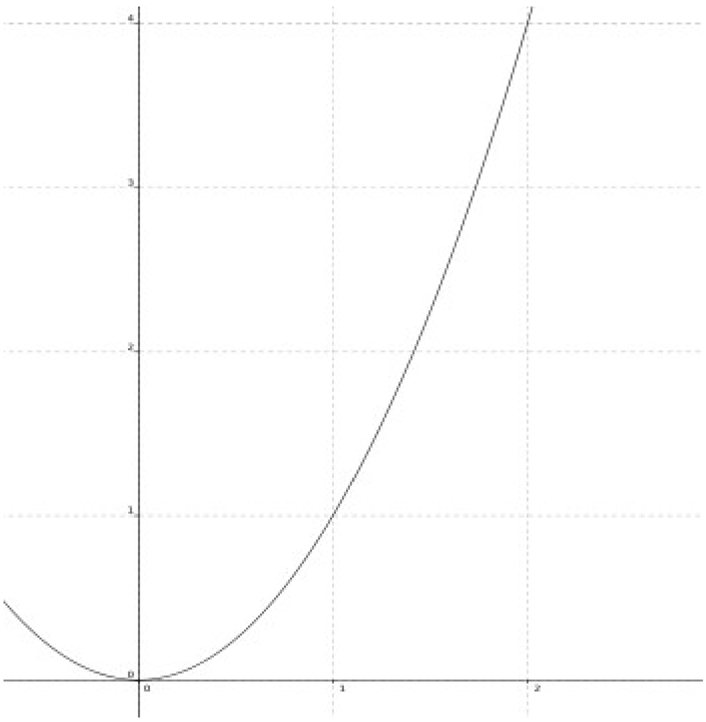
On donne ci-dessous certains éléments d'un calcul de limite de <u>grande somme</u> de Riemann pour déterminer l'aire de la surface comprise entre une représentation graphique de la fonction f, l'axe [……] et les droites d'équations y=0, […………………..] et […………………...].

Début du calcul

On partage l'intervalle […...................] en n sous-intervalles équidistants de longueur […......]

et on note $\Delta x=$ [….........................…]

On pose :



x_0 =[….........................…]

$x_1 = \; 1+\frac{1}{n}$

x_2 =[….........................…]

x_3 =[….........................…]

…

x_{n-1} =[….........................…]

x_n =[….........................…]

On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$S_n \;=\; \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+[......................]$$

$$=\; \Delta x\; ([\;\ldots...])$$

$$=\; \frac{1}{n}\cdot(f([........])+f(1+\frac{2}{n})+f([..............])+\ldots+f([..............]))$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(([........])^2+(1+\frac{2}{n})^2+([..............])^2+\ldots+([..............])^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left((1^2+2\cdot1\cdot\frac{1}{n}+(\frac{1}{n})^2)+(1^2+2\cdot1\cdot\frac{2}{n}+(\frac{2}{n})^2)+([..............................])+\ldots+([...........................])\right)$$

on regroupe dans 3 grandes parenthèses des termes semblables :

$$= \frac{1}{n}\cdot\left((1^2+1^2+\ldots+1^2)+(2\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{2}{n}+[............]+\ldots+[............])+\left((\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+[............]+\ldots+[............]\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left((n)+\frac{2}{n}([........]+2+\ldots+[........])+\frac{1}{n^2}([........]+2^2+\ldots+[........])\right)$$

Dans la table numérique, on trouve les formules suivantes :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\left((n)+\frac{2}{n}([.....................................])+\frac{1}{n^2}([.....................................])\right)$$

$$= 1+\frac{n+1}{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n+1}{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= = \lim_{n\to+\infty}[...]+\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{[.............]}$$

$$= [...]$$

$= [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = \frac{7}{3}$

On admet qu'on détermine de façon identique la **somme des aires des petits rectangles** de façon identique et qu'on trouve finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \frac{7}{3}$

On avait $s_n < [\ldots\ldots\ldots\ldots] < S_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n \quad [\ldots\ldots\ldots\ldots] \quad A \quad [\ldots\ldots\ldots\ldots] \quad \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

C'est-à-dire : $\frac{7}{3} \leqslant A \leqslant [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$, donc $\int_1^2 [\ldots\ldots\ldots\ldots] \, dx = [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Exercice 7 (environ 16 points)

On donne ci-dessous l'énoncé et une démonstration du théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) : relation entre intégrale et dérivée.

Remplir, directement sur l'énoncé, les [………] et donner les [ARG : ….] demandés :

Enoncé

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction [………………..] sur [*a*;*b*] et $x_0 \in [a; b]$.

On définit une nouvelle fonction *F* par $F(x) = [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$ pour $x \in [a ; b]$

Alors, on a: *F* est dérivable et $F\,'(x) = [\ldots\ldots\ldots\ldots], \forall\, x \in]a ; b[$

Démonstration

Cherchons à calculer $\lim\limits_{h \to o} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, car

[ARG : ....]

$$\lim_{h \to o} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{h},$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{h},$$

Appliquons le théorème de la moyenne à *f* sur l'intervalle […………..] ; c'est possible, car

[ARG : ....]

alors il existe un $c \in [x\,;x+h]$ tel que :

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = [................]\cdot(x+h-x) = \qquad = [................]\cdot h$$

On a donc :

$$\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{f(c)\cdot h}{h}$$
$$= \lim_{h \to o} f(c)$$, car

[ARG : ....]

Or $\lim\limits_{h \to o} f(c) = f(x)$, car

[ARG : ....]