Collège de Saussure

Examen semestriel de mathématiques de 4e année, niveau normal

Date	15 décembre 2016
Durée	190 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 4Ma1.DF04 (19 élèves)
Nombre de pages	12
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	7
Documents et matériel autorisés	personnels : calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable) ; table numérique non annotée
Consignes	• **Répondre directement sur les feuilles d'énoncé.** • La présentation doit être soignée, l'écriture lisible. • Toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; en particulier, les calculs d'intégrales doivent être effectués en détail à la main ; la calculatrice peut être utilisée pour vérification. • Tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : .... **Prénom :** ....

Groupe: .... **Cours :** ....

Points obtenus: .... **Note:** ....

Répartition des points

Exercice 1 : 15 points

Exercice 2 : 7 points

Exercice 3 : 12 points

Exercice 4 : 12 points

Exercice 5 : 9 points

Exercice 6 : 10 points

Exercice 7 : 17 points

Notations : 3 points

Total : 85 points

Question 1 (environ 15 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire et sous la forme la plus simplifiée possible :

(a) $f_1(x)=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3}{7\sqrt{x}}$ $= \sqrt{2}\,x^2 - \frac{3}{7}x^{-1/2}$

$\hookrightarrow F(x) = \sqrt{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{3}{7}\,\frac{x^{1/2}}{1/2} = \sqrt{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{3}{7}\cdot 2\sqrt{x}$

$= \sqrt{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{6}{7}\sqrt{x}$

/4

(b) $f_2(x)=\dfrac{x}{(3x^2+5)^6}$ $= x\,(3x^2+5)^{-6} = \frac{1}{6}\left[(3x^2+5)^{-6}\cdot 6x\right]$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{1}{6}\left[\frac{(3x^2+5)^{-5}}{-5}\right] = -\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{(3x^2+5)^5}$

/4

(c) $f_3(x)=\frac{e^x}{2}+\frac{2}{e^x}$ $= \frac{1}{2}e^x + 2\cdot e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 2(-1)\left[e^{-x}(-1)\right]$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^x - 2e^{-x} = \frac{1}{2}e^x - \frac{2}{e^x}$

/4

(d) $f_4(x)=\frac{x^2+1}{x}$ $= \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x|$

/ 3

Question 2 (environ 7 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sin(2x+\pi)$.

(a) Déterminer une primitive de *f*.

$f(x) = \sin(2x+\pi) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(2x+\pi) \cdot 2]$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{1}{2}[-\cos(2x+\pi)] = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)$

/3

(b) Déterminer toutes les primitives de *f*.

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi) + C$

/1

(c) Déterminer la primitive *F* de *f* telle que $F(\frac{-3\pi}{2})=1$

$F(-\frac{3\pi}{2}) = 1 \iff -\frac{1}{2}\cos(\cancel{2}(-\frac{3\pi}{\cancel{2}})+\pi) + C = 1$

$\iff -\frac{1}{2}\underbrace{\cos(-2\pi)}_{=1} + C = 1$

$\iff -\frac{1}{2} + C = 1$

$\iff C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

/3

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{3}{2}$

Question 3 (environ 12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2 e^{-x}$.

(a) Déterminer les zéros de la dérivée f' de f.

$f'(x) = (x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$ /2

$= xe^{-x}(2-x)$

$Z_{f'}$: $xe^{-x}(2-x)=0 \iff x=0$ ou $e^{-x}=0$ ($\emptyset$) ou $2-x=0$, $x=2$

$Z_{f'}=\{0;2\}$ /1

(b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de f.

x		0		2	
x	−	0	+	+	+
$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$	+	+	+	+	+
$2-x$	+	+	+	0	−
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	MIN	↗	MAX	↘

/3

f est ↗ sur $[0;2]$

f est ↘ sur $]-\infty;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$

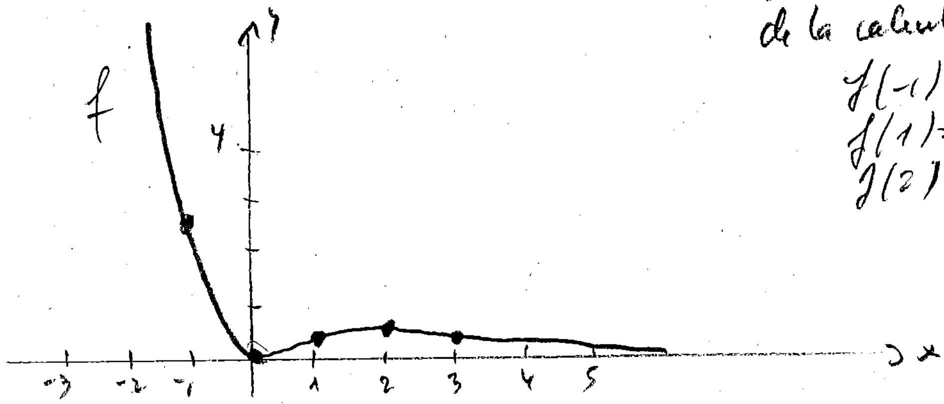
/1

(c) Déterminer les coordonnées des extrema de f en valeur exacte.

$f(0)=0$; $(0;0)$ est un minimum (local)

$f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$; $(2;\frac{4}{e^2})$ est un maximum (local) /2

(d) Représenter graphiquement f sur [-1;4].



avec l'aide de la table de la calculatrice :

$f(-1) \cong 2,7$ $f(3) \cong 0,45$

$f(1) \cong 0,37$ $f(4) \cong 0,3$

$f(2) \cong 0,54$

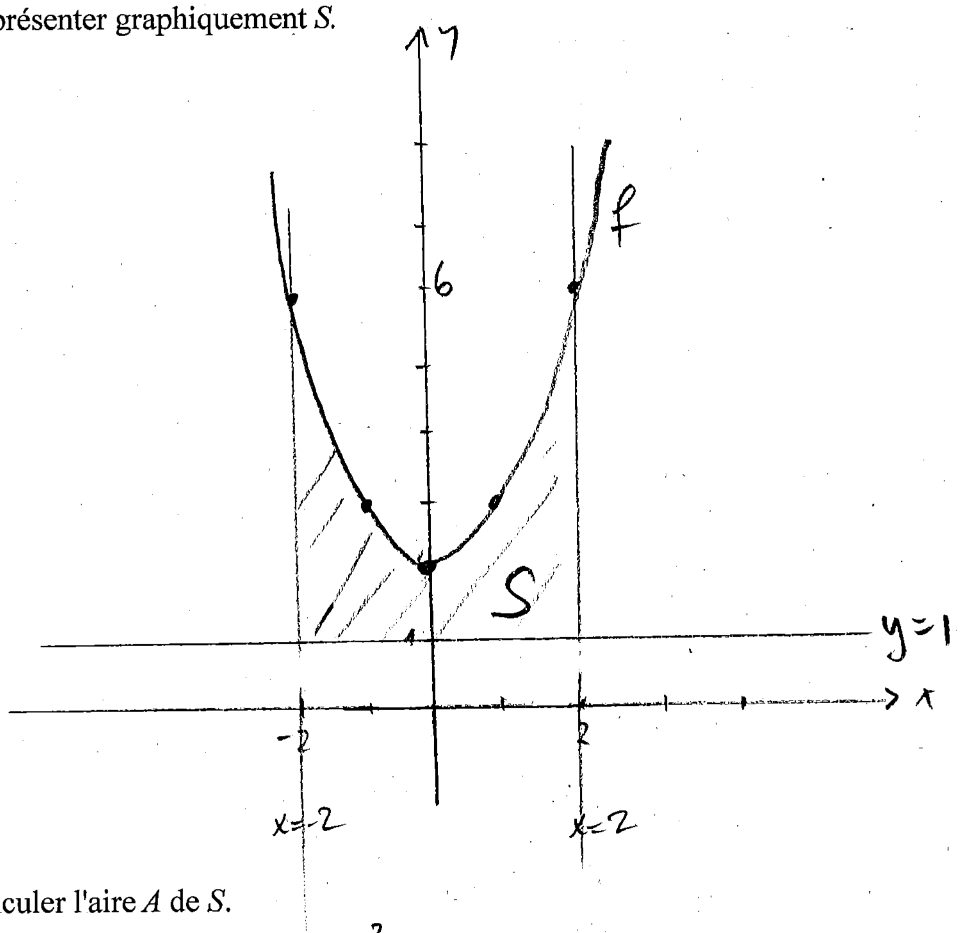
/3

Question 4 (environ 12 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2+2$.

Partie A : On considère la surface S délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $y=1$, $x=-2$ et $x=2$.

(a) Représenter graphiquement S.



/2

(b) Calculer l'aire A de S.

$$A = \int_{-2}^{2} (x^2+2) - 1 \, dx = \int_{-2}^{2} (x^2+1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-2}^{2}$$

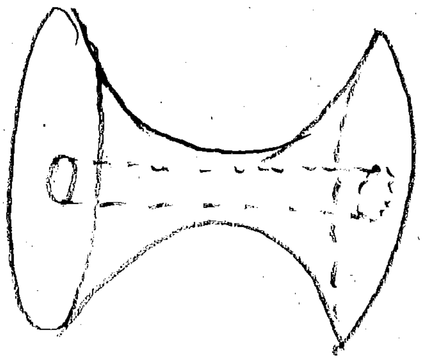
$$= \left(\frac{8}{3}+2\right) - \left(-\frac{8}{3}-2\right)$$

$$= \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3} \cong 9,3$$

/4

Partie B : On considère le solide de révolution *R* obtenu en faisant tourner *S* autour de l'axe O*x*

(c) Esquisser un dessin en perspective du solide *R*.



/2

(d) Calculer le volume de *R*.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (x^2+2)^2 dx - \pi \int_{-2}^{2} 1^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 + 4x^2 + 4 - 1) dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^4 + 4x^2 + 3) dx$$

$$= \pi \left(\left. \frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + 3x \right|_{-2}^{2} \right)$$

$$= \pi \left(\left(\frac{32}{5} + 4 \cdot \frac{8}{3} + 6 \right) - \left(-\frac{32}{5} - 4 \cdot \frac{8}{3} - 6 \right) \right)$$

/4

$$= \pi \left(\frac{64}{5} + \frac{64}{3} + 12 \right) = \pi \left(\frac{192 + 320 + 180}{15} \right)$$

$$= \pi \frac{692}{15} \left(\simeq 46{,}13\pi \right)$$

Question 5 (environ 9 points)

Pour chacune des conjectures suivantes, déterminer si elle est VRAIE ou FAUSSE et **justifier précisément votre réponse** en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les définitions et théorèmes vus au cours.

(a) Si f et g sont intégrables sur $[a;b]$ et si $f(x)=g(x)+C$ pour tout $x\in[a;b]$, C étant une constante, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=C(b-a)$

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)-g(x)dx=\int_a^b (g(x)+C)-g(x)\,dx$$

$$=\int_a^b C\,dx=C\int_a^b 1\,dx=C\cdot x\Big|_a^b=C\cdot(b-a)$$

c'est vrai

/3

(b) Si f est intégrable sur $[0;2]$, alors $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Faux, contre-ex :

$$\int_0^2 x\,dx \overset{?}{=} 2\int_0^1 x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \overset{?}{=} 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{2}-0\right)\overset{?}{=}2\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right) \Leftrightarrow 2\overset{?}{=}1 \quad \text{non}$$

/3

(c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

f dérivable $\Rightarrow$ f continue [par thm "dér $\Rightarrow$ cont"]

$\Rightarrow$ f admet une primitive $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ [par thm fond I]

vrai

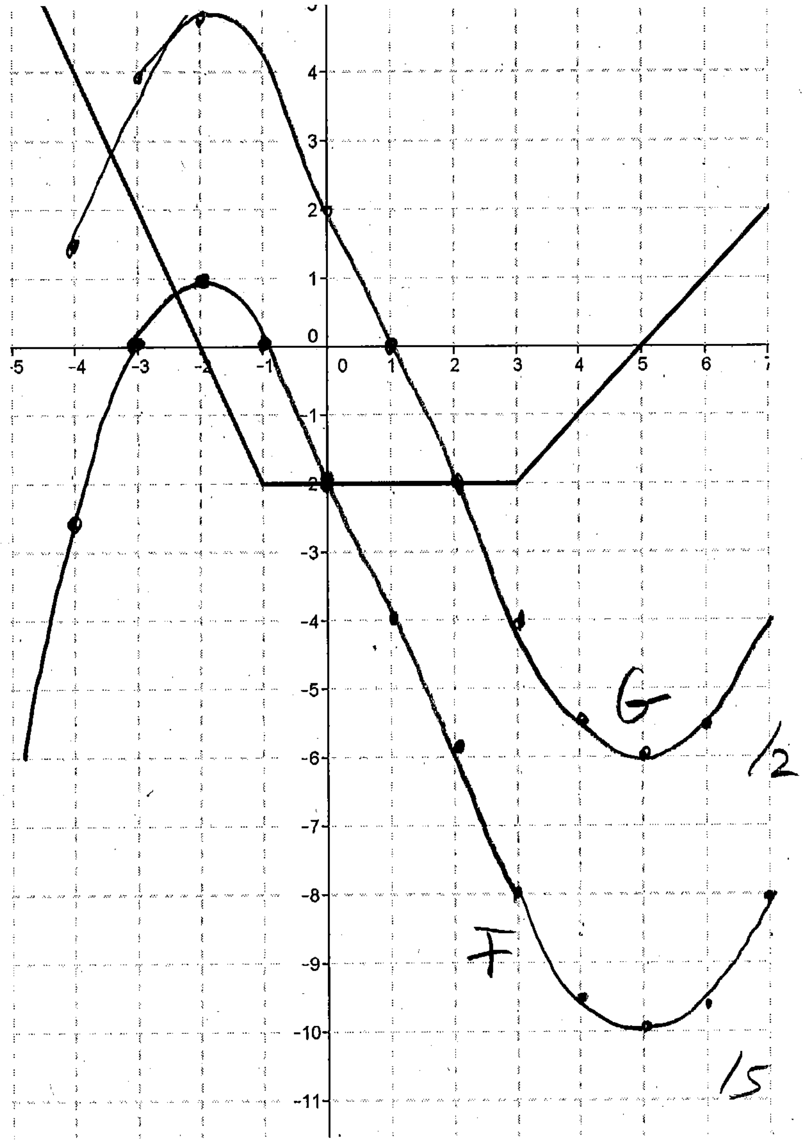
/3

Question 6 (environ 10 points)

On considère une fonction f donnée par une représentation graphique :

(a) Représenter graphiquement sur le repère ci-contre et sur l'intervalle [-5;7] la fonction F définie sur [-5;7] par $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$.

(b) Représenter dans le même repère qu'en (a) la primitive G de f telle que $G(1)=0$.



(c) Déterminer un nombre a tel que $\int_{a}^{x} f(t)\,dt=G(x), \forall x\in[-5;7]$.

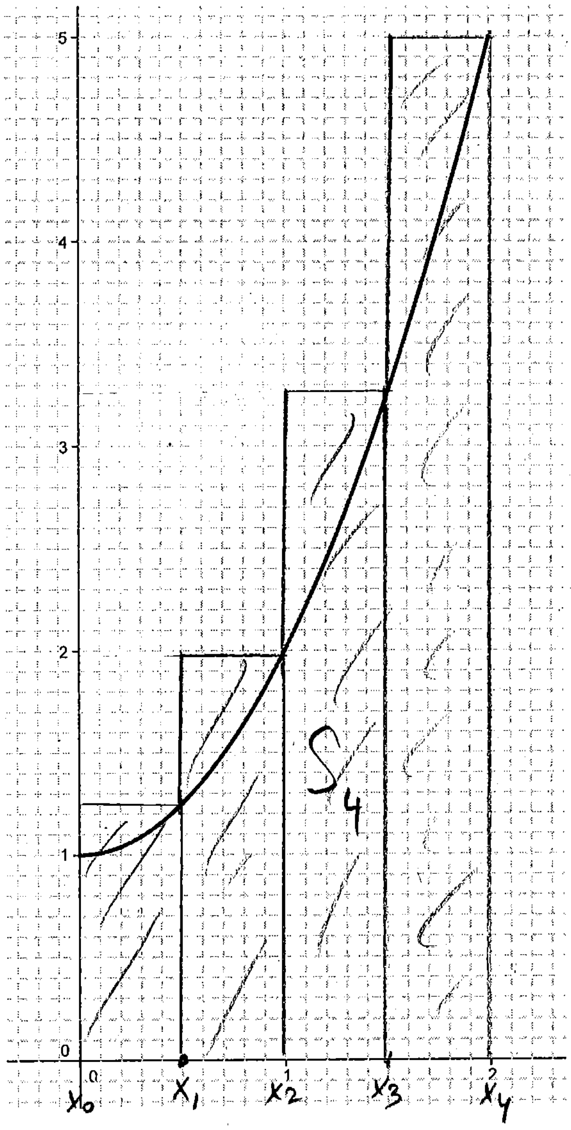
$a=1$ /1

(d) Déterminer la dérivée de la fonction $F-G$. Justifier.

$(F-G)'=F'-G'=f-f=0$ /2

Question 7 (environ 17 points)

On considère la fonction f définie sur [0;2] par $f(x)=x^2+1$, et S la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.



Partie A : On considère un partage de l'intervalle [0;2] en 4 sous-intervalles équidistants.

(a) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3 et x_4 , les points frontières de ces sous-intervalles.

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$x_0 = 0$ $\quad x_3 = \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_4 = 2$

$x_2 = 1$

/2

(b) Représenter sur le repère ci-contre la grande somme de Riemann. /1

(c) Calculer cette grande somme et donner le résultat ~~approché au millième~~. exact simpl. au max

$S_4 = \frac{1}{2} \cdot f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) + \frac{1}{2} f(x_3) + \frac{1}{2} f(x_4)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + (1)^2 + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 + (2)^2 + 1\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4\right)$

$= \frac{1}{2}\left(9 + \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{2}\right) = \frac{23}{4} = 5,75$

/2

(d) Que peut-on en déduire quant à l'aire de S ?

Qu'elle est inférieure à 5,75 /1

Partie B : On considère maintenant un partage de l'intervalle [0;2] en n sous-intervalles égaux.

(e) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de $x_0, x_1, x_2, x_3, x_{n-1}$ et x_n, points frontières de ces sous-intervalles.

$\Delta = \frac{2}{n}$ $\qquad x_3 = 3 \cdot \frac{2}{n}$

$x_0 = 0$ $\qquad x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{2}{n}$

$x_1 = \frac{2}{n}$ $\qquad$ /2

$x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$ $\qquad x_n = n \cdot \frac{2}{n}$

(f) Montrer que la grande somme de Riemann est égale à $S_n = \frac{2}{n} \cdot \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+n\right]$.

$S_n = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \ldots + \Delta f(x_{n-1}) + \Delta x f(x_n)$

$= \frac{2}{n}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(2\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \ldots + \left((n-1)\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + 1 \right)$

$= \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + (n-1)^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois}} \right\}$

$= \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right] + n\right]$

/3

(g) Montrer que la grande somme de Riemann peut aussi s'écrire comme $S_n = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$.

$$S_n = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot(1^2+\dots+n^2) + \frac{2}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\,\cancel{n}\,(n+1)(2n+1)}{\underset{n^2}{\cancel{n^3}}\cdot\underset{3}{\cancel{6}}} + 2$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$$

/2

(h) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ en donnant les détails des calculs.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)(2n+1)}{3n^2} + \lim_{n\to\infty} 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+6n+1}{3n^2} + 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(8+6/n+1/n^2)}{\cancel{n^2}\cdot 3} + 2$$

$$= \frac{8+0+0}{3} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

/2

(i) Que peut-on en déduire quant à l'aire de S ?

f continue et positive $\Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{14}{3}$ /2