Collège de Saussure Examen semestriel de mathématiques de 4e année, niveau normal	
Date	15 décembre 2016
Durée	190 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 4Ma1.DF04 (19 élèves)
Nombre de pages	12
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	7
Documents et matériel autorisés	personnels : calculatrice TI30X-PRO ou modèle équivalent (non graphique, non programmable) ; table numérique non annotée
Consignes	• **Répondre directement sur les feuilles d'énoncé.** • La présentation doit être soignée, l'écriture lisible. • Toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; en particulier, les calculs d'intégrales doivent être effectués en détail à la main ; la calculatrice peut être utilisée pour vérification. • Tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : .... **Prénom** : ....

Groupe: .... **Cours** : ....

Points obtenus: .... **Note**: ....

Répartition des points

Exercice 1 : 15 points

Exercice 2 : 7 points

Exercice 3 : 12 points

Exercice 4 : 12 points

Exercice 5 : 9 points

Exercice 6 : 10 points

Exercice 7 : 17 points

Notations : 3 points

Total : 85 points

Question 1 (environ 15 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire et sous la forme la plus simplifiée possible :

(a) $f_1(x)=\sqrt{2}\,x^2-\dfrac{3}{7\sqrt{x}}$

(b) $f_2(x)=\dfrac{x}{(3x^2+5)^6}$

(c) $f_3(x)=\frac{e^x}{2}+\frac{2}{e^x}$

(d) $f_4(x)=\frac{x^2+1}{x}$

Question 2 (environ 7 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sin(2x+\pi)$.

(a) Déterminer une primitive de *f*.

(b) Déterminer toutes les primitives de *f*.

(c) Déterminer la primitive *F* de *f* telle que $F(\frac{-3\pi}{2})=1$

Question 3 (environ 12 points)

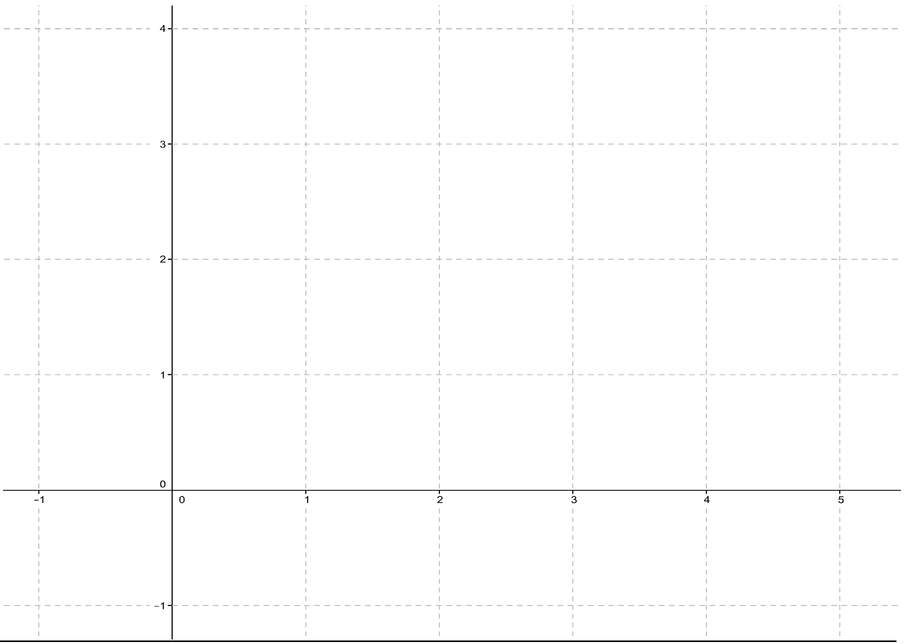
On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2 e^{-x}$.

(a) Déterminer les zéros de la dérivée *f* ' de *f*.

(b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de *f*.

(c) Déterminer les coordonnées des extrema de *f* en valeur exacte.

(d) Représenter graphiquement *f* ci-contre pour *x* appartenant à [-1;4].

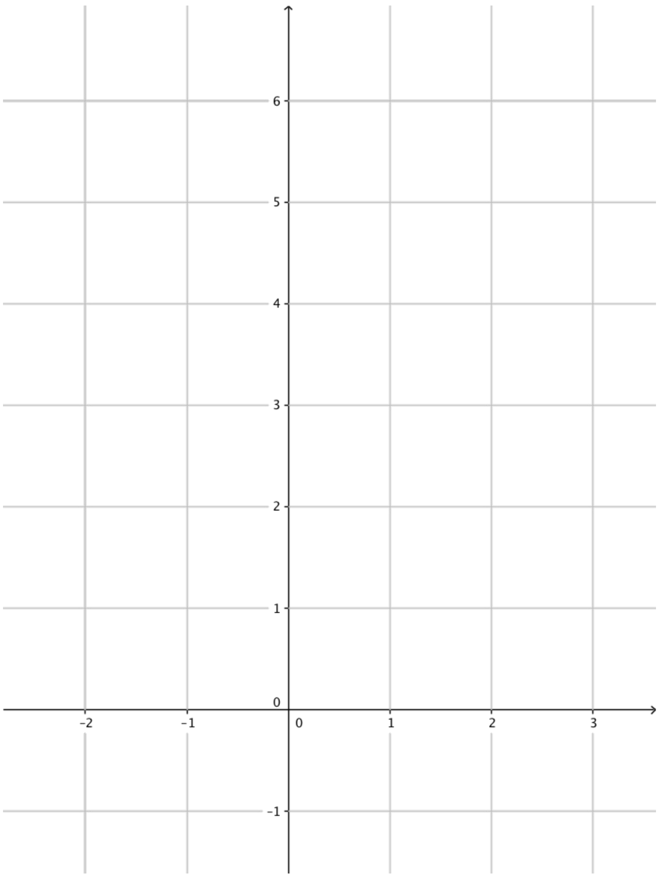


Question 4 (environ 12 points)

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+2$.

Partie A : On considère la surface *S* délimitée par la courbe représentative de *f* et les droites d'équations $y=1$, $x=-2$ et $x=2$.

(a) Représenter graphiquement *S*.



(b) Calculer l'aire *A* de *S*.

Partie B : On considère le solide de révolution *R* obtenu en faisant tourner *S* autour de l'axe O*x*

(c) Esquisser un dessin en perspective du solide *R*.

(d) Calculer le volume de *R*.

Question 5 (environ 9 points)

Pour chacune des conjectures suivantes, déterminer si elle est VRAIE ou FAUSSE et **justifier précisément votre réponse** en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les définitions et théorèmes vus au cours.

(a) Si f et g sont intégrables sur $[a;b]$ et si $f(x)=g(x)+C$ pour tout $x\in[a;b]$, C étant une constante, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=C(b-a)$

(b) Si f est intégrable sur $[0;2]$, alors $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

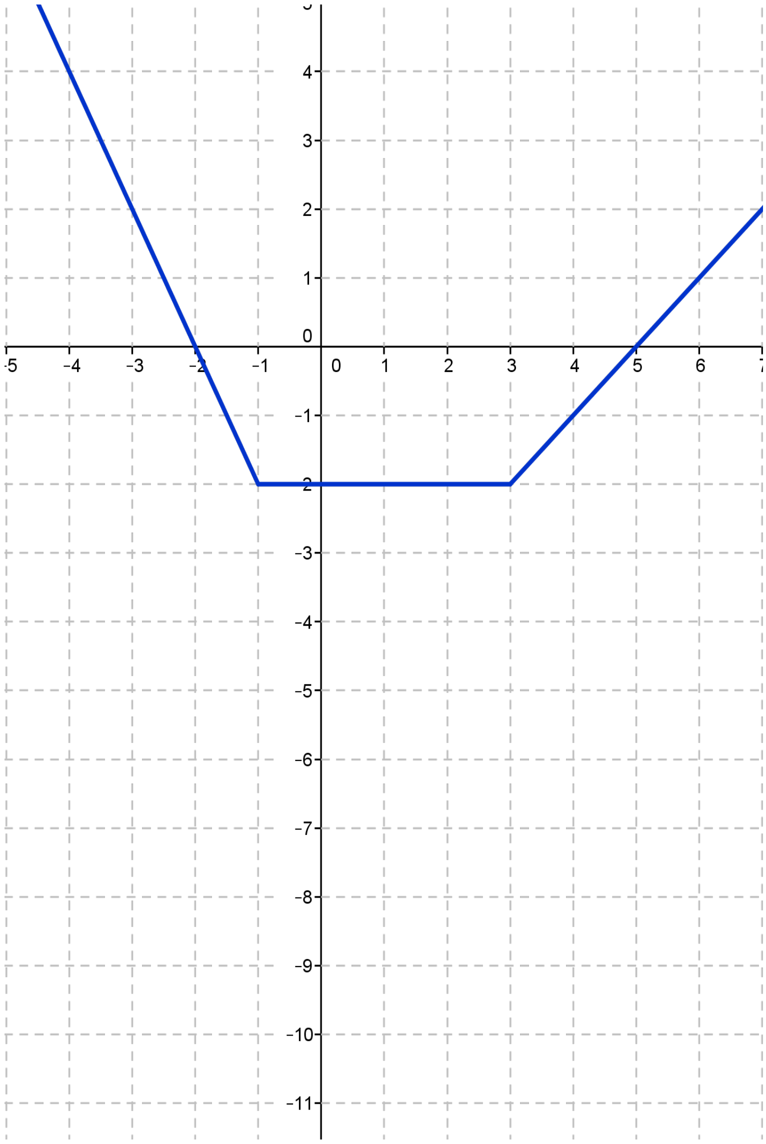
(c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Question 6 (environ 10 points)

On considère une fonction *f* donnée par une représentation graphique :

(a) Représenter graphiquement sur le repère ci-contre et sur l'intervalle [-5;7] la fonction *F* définie sur [-5;7] par $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$.

(b) Représenter dans le même repère qu'en (a) la primitive *G* de *f* telle que *G*(1)=0.

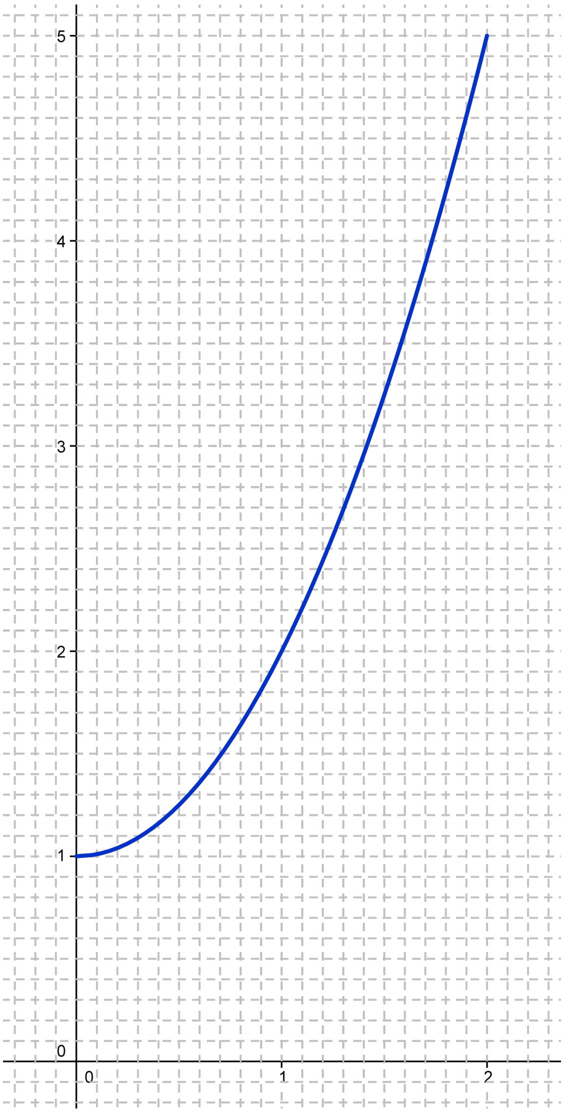


(c) Déterminer un nombre *a* tel que $\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{dt}=G(x), \forall x\in[-5\,;7]$.

(d) Déterminer la dérivée de la fonction *F* – *G*. Justifier.

Question 7 (environ 17 points)

On considère la fonction f définie sur [0;2] par $f(x)=x^2+1$, et S la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.



Partie A : On considère un partage de l'intervalle [0;2] en 4 sous-intervalles équidistants.

(a) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3 et x_4 , les points frontières de ces sous-intervalles.

(b) Représenter sur le repère ci-contre la grande somme de Riemann S_4.

(c) Calculer cette grande somme.

(d) Que peut-on en déduire quant à l'aire de S ?

Partie B : On considère maintenant un partage de l'intervalle [0;2] en *n* sous-intervalles égaux.

(e) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de $x_0, x_1, x_2, x_3, x_{n-1}$ et x_n , points frontières de ces sous-intervalles.

(f) Montrer que la grande somme de Riemann est égale à $S_n = \frac{2}{n} \cdot \left[\left(\frac{2}{n} \right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + n \right]$.

(g) Montrer que la grande somme de Riemann peut aussi s'écrire comme $S_n = \dfrac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$.

(h) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ en donnant les détails des calculs.

(i) Que peut-on en déduire quant à l'aire de S ?