Travail intermédiaire de mathématiques n°1

Date : 6 octobre 2016 Durée : 90 minutes Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 4Ma1DF03 **Nom**: .... **Prénom**: .... **Groupe**:	Informations chiffrées après correction du maître Notations (une coche par faute) : Fautes : .... / 2 Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : .... / 1 Total des points des exercices : .... / 72 Total des points de l'épreuve : .... / 74 Note : / 6
Matériel autorisé o Calculatrice personnelle non graphique et non programmable Remarques o Répondre sur l'énoncé. o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! o Indiquez vos initiales en haut de chaque page	

Début du travail

Exercice 1

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse simplifiée au maximum ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $f(x) = -6x^{-5}$

$F(x): -6\frac{x^{-4}}{-4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^4}$

/2 points

(b) $f(x) = \sin(x) - 12$

$F(x) = -\cos(x) - 12x$

/2 points

(c) $f(x)=\frac{x^5-x}{x^3}$ $= x^2 - \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$

/3 points

(d) $f(x)=x^2\cdot(x^3+1)^3$ $= \frac{1}{3}\left[(x^3+1)^3\cdot(3x^2)\right]$

$F(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{(x^3+1)^4}{4}\right) = \frac{1}{12}(x^3+1)^4$

/3 points

(e) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ $= \frac{1}{3}\left[(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)\right]$

$F(x) = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$

/4 points

(f) $f(x)=8\cos(2x-1)$ $= 4\cdot\left[\cos(2x-1)\cdot 2\right]$

$F(x) = 4\cdot\sin(2x-1)$

/3 points

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-8}{(2-x)^3}$ = "$\frac{-4}{0}$" type "$\frac{1}{0}$" ⇒ lim à g et à droite

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-8}{(2-x)^3} = \frac{-4}{(0^-)^3} = \frac{-4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-8}{(2-x)^3} = \frac{-4}{(0^+)^3} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$ donc $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-8}{(2-x)^2} \not\exists$

/3 points

(b) $\lim_{x\to 5} \frac{25-x^2}{x^2-5x}$ = "$\frac{0}{0}$" pb ⇒ fact/simpl.

$= \lim_{x\to 5} \frac{(5-x)(5+x)}{x(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{-\cancel{(x-5)}(x+5)}{x\cancel{(x-5)}} = -\frac{10}{5} = -2$

/3 points

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{x-2}$ = "$\frac{0}{0}$" trig

$= \lim_{x-2\to 0} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4} \cdot 2$

$= 2 \cdot \underbrace{\lim_{2x-4\to 0} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4}}_{=1}$

$= 2$

/3 points

Exercice 3

Représenter graphiquement une fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes

Précision : on demande bien une seule fonction qui vérifie toutes les conditions et non une fonction pour chaque condition

(a) L'ensemble Z_f des zéros de f est $\{-2;5\}$ 0.5

(b) $f(2)=-4$ 0.5

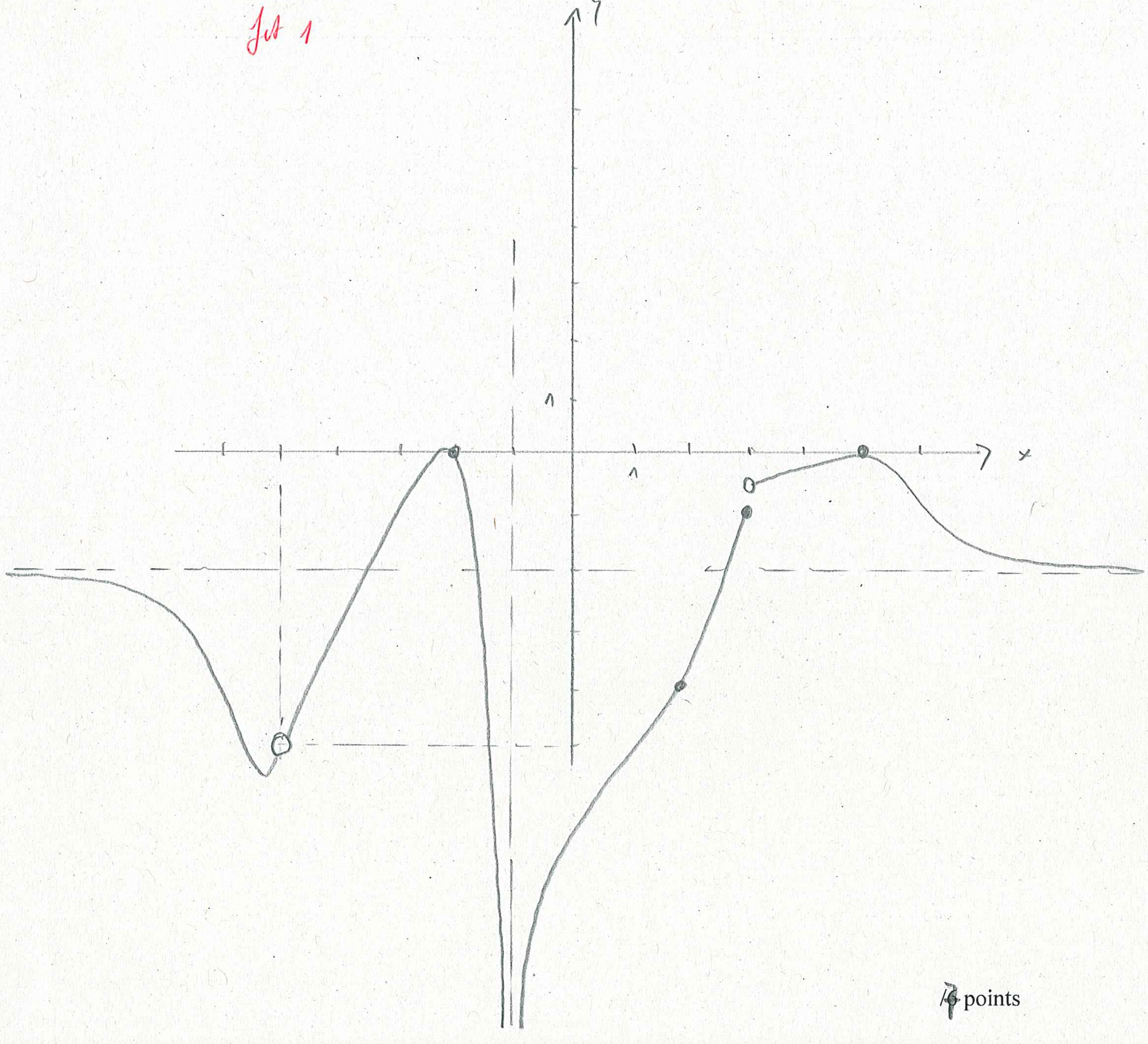
(c) $\lim_{x\to-4} f(x)=-5$ et $f(-4)$ n'existe pas 2

(d) f admet $y=-2$ comme asymptote horizontale à $\pm\infty$ 1

(e) $\lim_{x\to3} f(x)$ n'existe pas 1

(f) $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$ 1

Jst 1

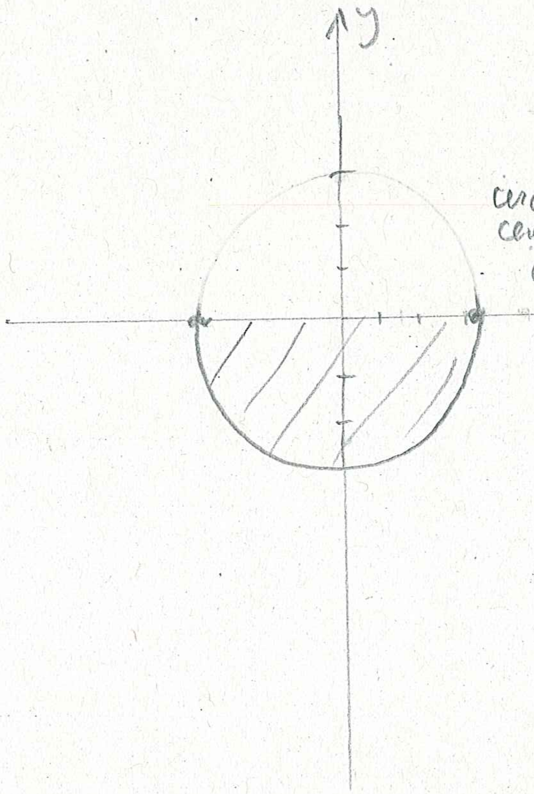


/7 points

(b) Soit f définie par $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$.

i. Esquisser (schéma « rapide ») une représenter graphique ci-dessous :

$$y \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{9-x^2} \\ y^2 = 9-x^2 \\ x^2+y^2 = 9 \end{array} \right.$$



cercle de centre O et de rayon 3 dont on garde la partie négative

/3 points

ii. déterminer géométriquement la valeur de l'aire délimitée par l'axe $0x$, les droites $x = -3$ *et* $x = 3$ [pas d'autre justif que le calculs]

$A = \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot \frac{9}{2}$

/2 points

iii. déterminer la valeur de $I = \int_a^b f(x)\,dx$. [pas d'autre justif que les calculs]

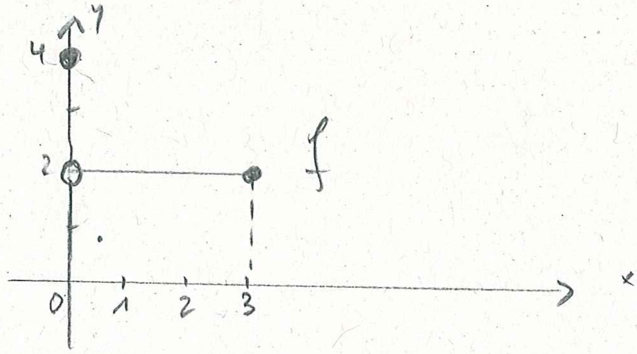
$I = -A = -\pi \cdot 9/2$

/2 points

Exercice 5 (environ 9 points)

On considère la fonction $f(x)=\begin{cases}2, \text{ si } x\in]0;3]\\ 4, \text{ si } x=0\end{cases}$ et $[a;b] = [0;3]$.

(a) Représenter graphiquement f.



/2 points

(b) Déterminer Δx, x_0, x_1, x_2, x_{n-1} et x_n :

$\Delta x = \frac{3}{n}$ $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{3}{n}$; $x_2 = 2\cdot\frac{3}{n}$; $x_{n-1} = (n-1)\frac{3}{n}$; $x_n = n\cdot\frac{3}{n} = 3$

/2 points

(c) Calculer $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon détaillée à l'aide des petites et grandes sommes de Riemann.

$m_1 = m_2 = \dots = m_n = 2$

$M_1 = 4$; $M_2 = M_3 = \dots = M_n = 2$

$s_n = \Delta x\, m_1 + \Delta x\, m_2 + \dots + \Delta x\, m_n = \frac{3}{n}\Big[\underbrace{2+2+\dots+2}_{n \text{ fois}}\Big] = \frac{3}{\cancel{n}}\cdot 2\cancel{n} = 6$

$S_n = \Delta x\, M_1 + \Delta x\, M_2 + \dots + \Delta x\, M_n = \frac{3}{n}\Big[4 + \underbrace{2+2+\dots+2}_{(n-1) \text{ fois}}\Big] = \frac{3}{n}\big[4+2(n-1)\big]$

$= \frac{3}{n}\big[2n+2\big]$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 6 = 6$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}(2n+2) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+6}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(6+6/n)}{\cancel{n}_1} = 6$

donc $\int_0^3 f(x)\,dx = 6$

/6 points

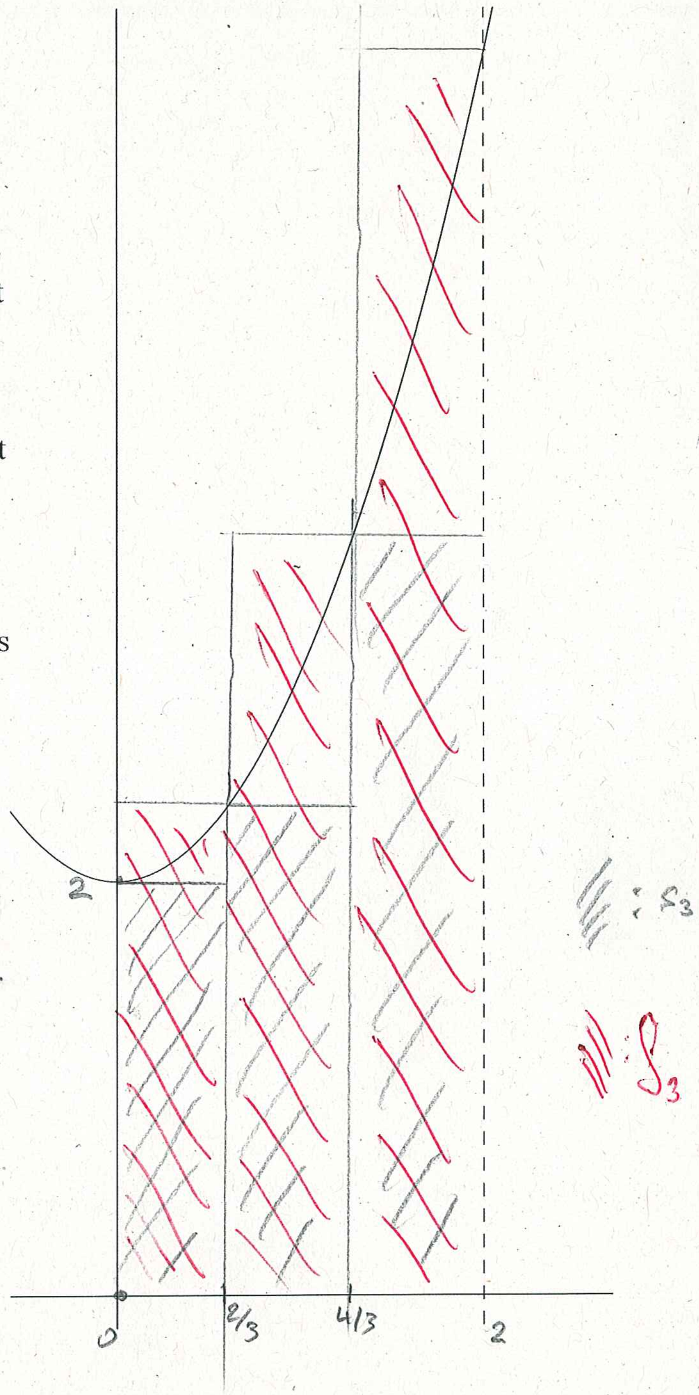
Exercice 6

On considère la fonction $f(x)=2+x^2$ et on s'intéresse à l'aire A délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, et $y = 0$.

(a) On considère un partage de $[0;2]$ en <u>trois</u> sous-intervalles équidistants pour donner une approximation par excès et par défaut de l'aire délimitée (c'est-à-dire un encadrement de l'aire).

i. Représenter graphiquement ci-contre de façon précise les petites et grandes sommes de Riemann pour ce partage avec des couleurs différentes et en explicitant clairement qui est qui.

/2 points



ii. Effectuer les calculs pour obtenir cette approximation.

$$s_3 = \frac{2}{3}\cdot f(0) + \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left[2 + 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[6 + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{74}{9}\right] = \frac{148}{27}$$

$$S_3 = \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3} f(2)$$
$$= \frac{2}{3}\left[2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2 + 2^2\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[6 + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + 4\right] = \frac{2}{3}\left[10 + \frac{20}{9}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{110}{9}\right] = \frac{220}{27}$$

$$s_3 \leq A \leq S_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{148}{27} \leq A \leq \frac{220}{27}$$

$$(5{,}48 \leq A \leq 8{,}15)$$

/5 points

(c) On considère un partage de $[0;2]$ en n sous-intervalles équidistants.

i. Déterminer Δx , $x_0, x_1, x_2, \dots , x_{n-1}, x_n$:

$\Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad x_0 = 0$

$x_1 = \frac{2}{n}$

$x_2 = \frac{2}{n} \cdot 2$

$x_{n-1} = \frac{2}{n}(n-1)$

$x_n = \frac{2}{n} \cdot n = 2$

/2 points

ii. Exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de n.
Remarque : on ne demande pas la petite somme.

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta f(x_n)$$
$$= \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n} \cdot 2\right) + \dots + \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n} \cdot n\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left(f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n} \cdot 2\right) + \dots + f\left(\frac{2}{n} \cdot n\right)\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left(\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 2\right] + \left[\left(\frac{2}{n} \cdot 2\right)^2 + 2\right] + \dots + \left[\left(\frac{2}{n} \cdot n\right)^2 + 2\right]\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot 2^2 + \dots + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot n^2 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ fois}}\right]$$
$$= \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + n \cdot 2\right]$$
$$= \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \cdot 2\right]$$
$$= \frac{2}{n} \cdot \left[\frac{4\, n(n+1)(2n+1)}{n^2 \cdot 6} + n \cdot 2\right]$$
$$= \frac{\cancel{2} \cdot 4 \cancel{n}(n+1)(2n+1)}{3 \cancel{6}\, \cancel{n^3} n^2} + \frac{2 \cdot \cancel{n} \cdot 2}{\cancel{n}}$$
$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 4$$

/8 points

iii. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{4(2n^2 + 2n + n + 1)}{3n^2} + 4\right]$$
$$= \left(\lim_{n \to \infty} \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}\right) + 4 = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}[8 + 12/n + 4/n^2]}{\cancel{n^2} \cdot 3} + 4 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

/2 points