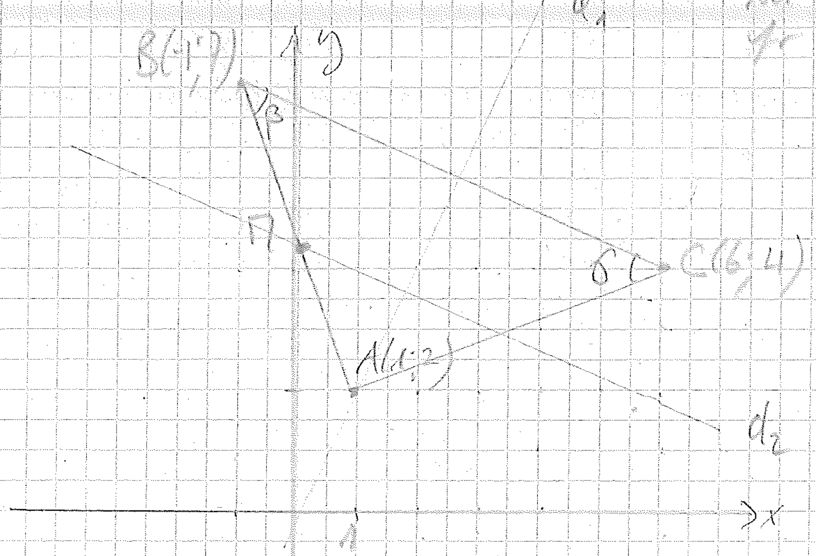
17a 4N - Travail n°3 du 6/3/2017 - Corrigé

tot 19½
not 12
/22

/19 ex1



(a) rectangle en A $\Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1-1\\7-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6-1\\4-2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\cdot5+5\cdot2=0$ ok

/6

isocèle : $\|\vec{AC}\| \overset{?}{=} \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \sqrt{5^2+2^2} \overset{?}{=} \sqrt{(-2)^2+5^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{29} \overset{?}{=} \sqrt{29}$ ok

(b) ΔABC rectangle en A $\Leftrightarrow \beta+\gamma = 180-90 = 90$

ΔABC isocèle avec $\|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \beta=\gamma=45°$ /3

(c) un vecteur normal à d_1 : $\vec{BC} = \begin{pmatrix}6-(-1)\\4-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$

un point de d_1 : $A(1;2)$

un point inconnu de d_1 : $P(x;y)$ /4

$\Rightarrow \vec{AP}\cdot\vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7(x-1)-3(y-2)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{7x-3y-1=0}$: d_1

(d) M milieu de [AB] $= \left(\frac{1+(-1)}{2} ; \frac{7+2}{2}\right) = (0;4,5)$ point de d_2

$\vec{BC} = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal de d_1 donc vecteur directeur de d_2 : $\vec{v}$

(par thm "[illegible] de d dans $\mathbb{R}^2$")

Q(x;y) pt inconnu de d_2

$\Rightarrow \vec{MQ} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-0\\y-4,5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ ég. vect. de d_2 /6

$\Leftrightarrow$ ① $x = 7\lambda$
② $y-4,5 = -3\lambda$ Syst. d'ég. param. de d_2

$3\cdot$① $+ 7\cdot$② : $3x+7y-31,5=0$ ég. cart. de d_2

ex2 :

/14

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 0-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires donc A, B, C non alignés

/2

(b) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 1-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Posons $E=(x;y;z)$: $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-(-1) \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$

On veut $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{CE}$ pour un certain λ : $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$

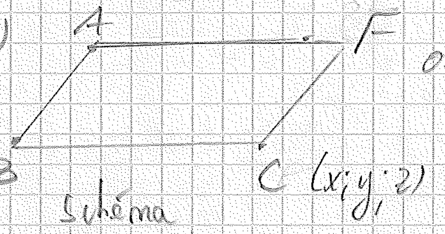
on choisit par exemple : $\lambda = 2$: $\begin{cases} -2 = +2(x-4) \\ 2 = +2(y+1) \\ -3 = 2(z-3) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1{,}5 \end{cases}$

/4

$E = (3;0;1{,}5)$

(et $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$)

(c)



on veut $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CF} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$ /3

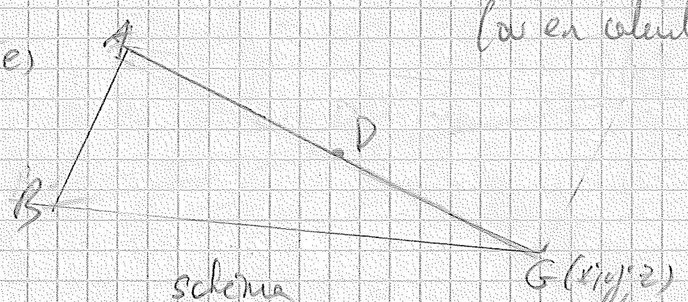
$\iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ d'où $F = (7;1;0)$

(d) $\|\overrightarrow{AB}\| \overset{?}{=} \|\overrightarrow{BC}\| \iff \sqrt{(-3)^2+(-2)^2+3^2} \overset{?}{=} \sqrt{6^2+(-1)^2+0^2}$ /2

$\iff \sqrt{22} \overset{?}{=} \sqrt{37}$ non donc ABCF pas un carré

(ou en calculant l'angle...)

(e)



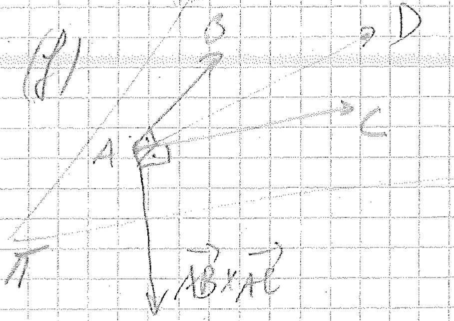
on veut $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$

$\iff 2\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix}$ /3

$\iff 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$G(3;0;0)$

est situé sur l'axe Ox /2



$D \overset{?}{\in}$ plan contenant A, B et C

on calcule $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\18\\15\end{pmatrix}$

D coplanaire avec A, B, C

$\Leftrightarrow$

$\vec{AD}\perp\vec{AB}\times\vec{AC}$

$\Leftrightarrow$

$\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC})=0$

$\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\18\\15\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3-18+0 \overset{?}{=} 0$ non

A, B, C et D ne sont pas coplanaires

/4

(g) $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\18\\15\end{pmatrix}$ vecteur normal à π_1

A point connu de π_1

$P(x;y;z)$ pt inconnu de π_1

$\vec{AP}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC})=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\18\\15\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 3x+18y+15z-39=0$

$\Leftrightarrow x+6y+5z-13=0 \quad : \pi_1$

/4

(h) $\pi_2 : 2x-3y+z-4=0$

$2\cdot2-3\cdot1+0-4 \overset{?}{=} 0$ non, donc $D\notin\pi_2$

/2

(i) $x=y=0 \Rightarrow z=4$ donc $(0;0;4)\in\pi_2$

$y=z=0 \Rightarrow x=2$ donc $(2;0;0)\in\pi_2$

/2

(j) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\perp\pi_2$ (par thm)

/1

(k) $\pi_3 : 2x-3y+z-2=0$ (car même vecteur normal de π_2 avec d différent)

/1

(l) $\pi_4 : 2x-3y+z+d=0$ (idem)

et $2\cdot2-3\cdot1+0+d=0$

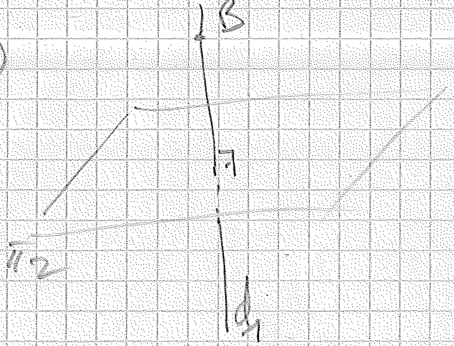
$\Leftrightarrow d=-1$ donc $\pi_4 : 2x-3y+z-1=0$

/2

(m) $\delta_{(A;\pi_2)} = \dfrac{|2\cdot1-3\cdot2+1\cdot0-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \dfrac{|-8|}{\sqrt{14}} = \left(\dfrac{8}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \dfrac{\cancel{8}^{\,4}\sqrt{14}}{\cancel{14}_{\,7}} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}\right)$

/2

(n)



un vecteur normal à Π_2 : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est directeur de d_1
un point connu de d_1 : $B(-2;0;3)$
un pt inconnu de d_1 : $P(x;y;z)$

$\overrightarrow{BP} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-0\\z-3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ éq. vect de d

/3

(o) on choisit $\lambda = 1$: $\begin{cases}x+2=2\\y=-3\\z-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-3\\z=4\end{cases}$ d'où $(0;-3;4) \in d_1$ /2

(p) d_2 : $\overrightarrow{AP} = \lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-2\lambda\\y=2\\z=4\lambda\end{cases}$

dans Π_2 : $2(1-2\lambda)-3(2)+(4\lambda)-4=0$ /3
$\Leftrightarrow 2-\cancel{4\lambda}-6+\cancel{4\lambda}-4=0$
$\Leftrightarrow -8=0$ impossible, donc $d_2 \cap \Pi_2 = \emptyset$ /1

ex3 Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$. Alors $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1+v_2w_2$ /2

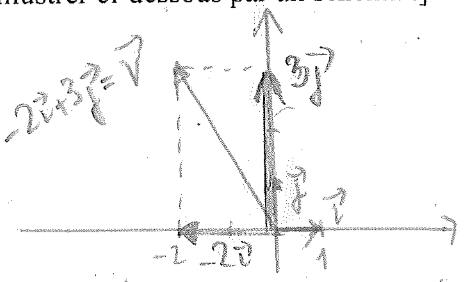
/13

Démonstration

On écrit : $\vec{v}=v_1\left(\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\right)+v_2\left(\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\right)$ et $\vec{w}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}w_1+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}w_2\right]$

Illustrons par un schéma cette idée dans le cas où $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

[→ illustrer ci-dessous par un schéma :]



/2

On a : $[\vec{v}\cdot\vec{w}]=\left(v_1\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+v_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\right)\cdot\left(w_1\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+w_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\right)$,

car [ARG : Substitution]

$$=\left(v_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+\left(v_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)+\left(v_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+\left(v_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

car [ARG : propriété du produit scalaire]

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+v_1\cdot w_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]+[v_2\cdot w_1]\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

car [ARG : propriété de produit scalaire]

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+v_1\cdot w_2(0)+v_2\cdot w_1(0)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

car [ARG : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont $\perp$ donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0$]

arg : 1
[...] : /2

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$=v_1\cdot w_1\left(\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|\cdot\cos(0)\right)+v_2\cdot w_2\left(\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\|\cdot\cos(0)\right),$$

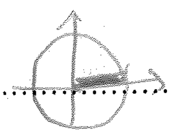
car [ARG: définition du produit scalaire]

$$=v_1\cdot w_1(1\cdot1\cdot\cos(0))+v_2\cdot w_2(1\cdot1\cdot\cos(0)),$$

car [ARG: $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1 (ou calcul de la norme)]

$$=v_1\cdot w_1(1\cdot1\cdot1)+v_2\cdot w_2(1\cdot1\cdot1),$$

car [ARG: cos(0) = 1]



$=[v_1w_1+v_2w_2]$