Travail intermédiaire de mathématiques n°4

Date : 27 mars 2017 Durée : 90 minutes Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 4Ma1DF03 **Nom**: .... **Prénom**: .... **Groupe**:	Informations chiffrées après correction du maître Notations (une coche par faute) : Fautes : .... / 1 Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : .... / 1
Matériel autorisé ○ Calculatrice personnelle non graphique et non programmable Remarques ○ Répondre sur l'énoncé. ○ Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; <u>il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs</u>. ○ Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! ○ Indiquez vos initiales en haut de chaque page	Total des points des exercices : .... / 59 Total des points de l'épreuve : .... / 60 Note : / 6

Début du travail

Exercice 1

/7

Résoudre le système suivant avec le calcul matriciel :

$$\begin{cases} -3x+4y=1 \\ -2x+4y=-3 \end{cases}$$

$M=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{-12-(-8)}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ /3

$M\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4+12\\ 2+9\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}16\\ 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -11/4\end{pmatrix}$ /3

$S=\{(-4;-\frac{11}{4})\}$

/1

Exercice 2

/7

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -9\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes ; si cela n'est pas possible, expliquer pourquoi :

(a) $AC = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -9\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+6-9 & 0-4-9\\ -9-3+1 & 0+2+1\\ -6+3+4 & 0-2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -13\\ -11 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

/2

(b) $CA = \underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -9\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}_{3\times3}}_{\text{impossible}}$

/2

(c) $D^4 = D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

/1

(d) $ACDE = \underbrace{A_{3\times3}\cdot C_{3\times2}}_{\checkmark}\cdot \underbrace{D_{2\times2}}_{\checkmark}\cdot\underbrace{E_{2\times2}}_{\checkmark}$

Comme $E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, on a $ACDE = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{3\times2}$

/2

Exercice 3

[/7]

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(a) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x+3y \end{pmatrix}$

$$A\left(\alpha\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} \alpha A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \beta A\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \alpha v_1+\beta w_1 \\ \alpha v_2+\beta w_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ -2v_1+3v_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -2w_1+3w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2(\alpha v_1+\beta w_1)+3(\alpha v_2+\beta w_2) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(-2v_1+3v_2)+\beta(-2w_1+3w_2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2\alpha v_1-2\beta w_1+3\alpha v_2+3\beta w_2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(-2)v_1+\alpha 3v_2+\beta(-2)w_1+\beta\cdot 3w_2 \end{pmatrix}$$

oui

A est linéaire /4

(b) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2y \\ -y \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 2$: $B(\alpha\vec{v}) \stackrel{?}{=} \alpha B(\vec{v})$

$$\Leftrightarrow B\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 2B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+4 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 2\begin{pmatrix} 1+2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$ non

B n'est pas linéaire /3

OU

$B(\vec{0}) = B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc B n'est pas linéaire

Exercice 4

[/10]

On considère les applications linéaires suivantes : $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\x+3y\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\-y\end{pmatrix}$

(a) Déterminer $A\circ B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sans utiliser les matrices associées.

$A\left(B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}x+2y\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3(x+2y)\\(x+2y)+3(-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x-6y\\x-y\end{pmatrix}$

/2

(b) Déterminer leurs matrices (relativement à la base canonique).

M_A : $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ donc $M_A=\begin{pmatrix}-3&0\\1&3\end{pmatrix}$

M_B : $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ donc $M_B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$

/4

(c) Déterminer la matrice de $A\circ B$ (relativement à la base canonique).

$M_{A\circ B}=M_A\cdot M_B=\begin{pmatrix}-3&0\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6\\1&-1\end{pmatrix}$

/2

(d) Déterminer $A\circ B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en utilisant les matrices associées.

$A\circ B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M_A\cdot M_B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6\\+1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x-6y\\x-y\end{pmatrix}$

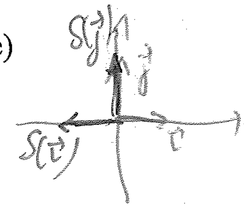
/2

/12

Exercice 5

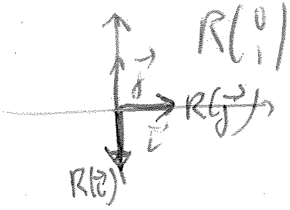
Soient $R_{\frac{3\pi}{2}}$ la rotation de $\frac{3\pi}{2}$ centrée en l'origine et S_{Oy} la symétrie d'axe Oy.

(a) Déterminer leurs matrices (relativement à la base canonique)



M_R : $R\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ donc $M_R=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$R\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



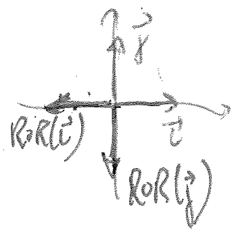
M_S : $S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ donc $M_S\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

/4

(b) Déterminer la matrice de $R_{\frac{3\pi}{2}} \circ R_{\frac{3\pi}{2}}$ et décrire de quelle transformation du plan il s'agit.

$R\circ R = M_R\cdot M_R = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$



/2

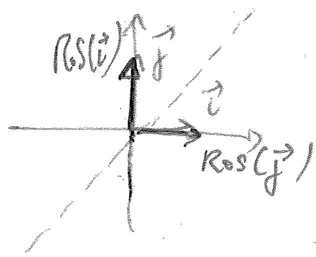
c'est la rotation d'angle π

[logique : $\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\frac{6\pi}{2}=3\pi$, donc π !]

/2

(c) Déterminer la matrice de $R_{\frac{3\pi}{2}} \circ S_{Oy}$ et décrire de quelle transformation du plan il s'agit.

$M_{R\circ S} = M_R\cdot S_R = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$



/2

c'est la symétrie d'axe $y=x$

/2

Exercice 6

[16]

(a) Enoncer le théorème « Image de $\vec{0}$ par une application linéaire » [aussi appelé « Tester la non linéarité » dans la théorie ...]

Si L est une appl. telle que $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$, alors L n'est pas linéaire

ou

Si L est une transformation du plan linéaire, alors $L(\vec{0}) = \vec{0}$

ou

Si L est une application linéaire, alors $L(\vec{0}) = \vec{0}$.

/2

(b) Enoncer le théorème «Une application linéaire est entièrement déterminée par deux images »

Soit L une appl. linéaire, $L(\vec{i}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $L(\vec{j}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

alors $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

/3

(c) Enoncer le théorème «Matrice d'une application linéaire »

Soit L une appl. linéaire, $L(\vec{i}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $L(\vec{j}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Alors $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

/3

($M_L = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de l'appl. linéaire (relativement à la base canonique))

(d) Donner la démonstration de deux de ces théorèmes au choix en justifiant précisément.

/8