Collège de Saussure Epreuve de mathématiques de 4e année, niveau normal	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	30 novembre 2020
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

Répartition des points

Exercice 1 : 16 points

Exercice 2 : 8 points

Exercice 3 : 10 points

Exercice 4 : 8 points

Exercice 5 : 8 points

Exercice 6 : 10 points

Exercice 7 : 17 points

Total : .... / 77 points

Notations : .... → .... / 2 points

Français (facultatif) : .... → .... / 1 point

Total final : .... / 79 points

Note : ..../ 6

Exercice 1 (environ 16 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire et sous la forme la plus simplifiée possible :

(a) $f_1(x)=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3}{7\sqrt{x}}$ $=\sqrt{2}\,x^2-\frac{3}{7}x^{-1/2}$

$F_1(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{7}\frac{x^{1/2}}{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{3}x^3-\frac{6}{7}\sqrt{x}$ 4/4

(b) $f_2(x)=\dfrac{x}{(3x^2+5)^6}$ $=x\,(3x^2+5)^{-6}=\frac{1}{6}\left[(3x^2+5)^{-6}\cdot 6x\right]$

$F_2(x)=\frac{1}{6}\left[\frac{(3x^2+5)^{-5}}{-5}\right]=-\frac{1}{30}\,\frac{1}{(3x^2+5)^5}$ 4/4

(c) $f_3(x)=\cos(3x+1)-15x^4$ $= \frac{1}{3}\left[\cos(3x+1)\cdot 3\right] - 15x^4$

$F_3(x) = \frac{1}{3}\left[\sin(3x+1)\right] - 15\cdot\frac{x^5}{5}$

$= \frac{1}{3}\sin(3x+1) - 3x^5$

/4

(d) $f_4(x)=\frac{\pi x^8-2x}{x^4}$ $= \pi\frac{x^8}{x^4} - \frac{2x}{x^4} = \pi x^4 - 2x^{-3}$

$F_4(x) = \pi\frac{x^5}{5} - 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = \pi\frac{x^5}{5} + \frac{1}{x^2}$

/4

Exercice 2 (environ 8 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sin(-2x) = -\frac{1}{2}\left[\sin(-2x)\cdot(-2)\right]$

(a) Déterminer une primitive de *f*.

$F(x) = -\frac{1}{2}\left[-\cos(-2x)\right] = \frac{1}{2}\cos(-2x)$

/3

(b) Déterminer toutes les primitives de *f*.

$F(x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$

/1

(c) Déterminer la primitive F de *f* telle que $F(\frac{-3\pi}{2})=1$

$\frac{1}{2}\cos\left(-2\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)+C=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(3\pi)+C=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-1)+C=1$

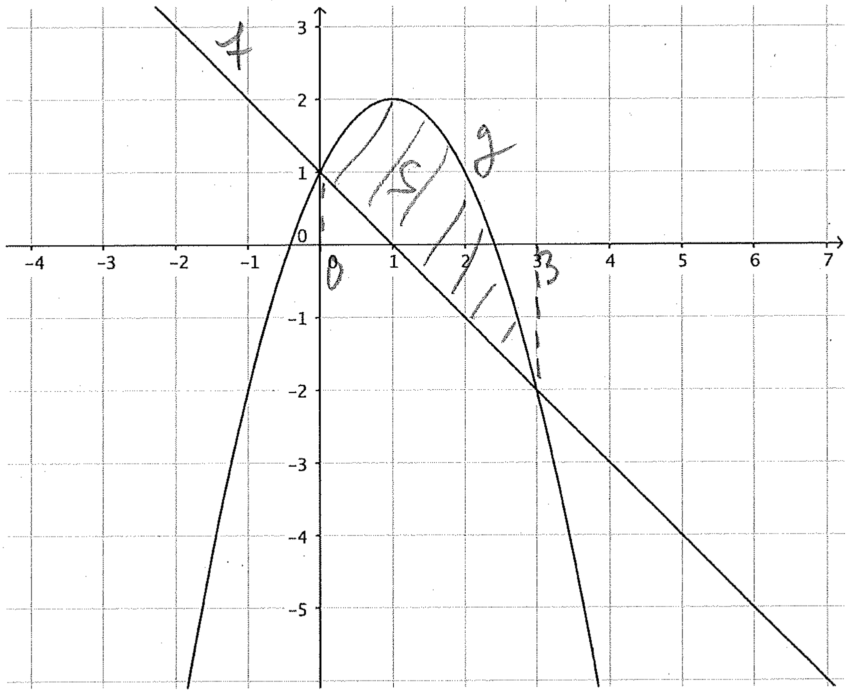
$\Leftrightarrow C = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$F(x) = \frac{1}{2}\cos(-2x)+\frac{3}{2}$

/4

Exercice 3 (environ 10 points)

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = -x+1$ et $g(x) = -(x-1)^2+2$:



On considère la surface S délimitée par les courbes représentatives de f et g

Hachurer S sur le schéma, identifier graphiquement les données utiles, puis calculer l'aire A de S ; donner la réponse en valeur exacte simplifiée au maximum.

$$A = \int_0^3 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^3 \left(-(x-1)^2+2\right) - (-x+1)\,dx = \int_0^3 -(x-1)^2 + x + 1\,dx$$

/3

$$= -\frac{(x-1)^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^3$$ /3

$$= \left[-\frac{(3-1)^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right] - \left[-\frac{(0-1)^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0\right]$$ /2

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{9}{2} + 3\right] - \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{-16+27+18-2}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

/2

ou

$$\int_0^3 -(x^2-2x+1)+x+1\,dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \Big|_0^3$$

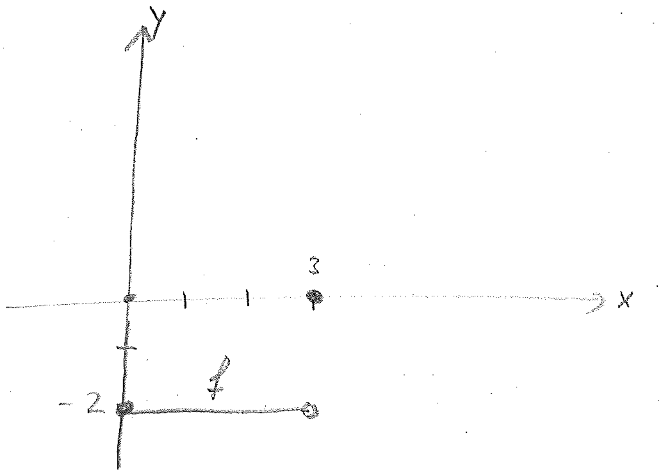
$$= \left(-\frac{27}{3} + 3\cdot\frac{9}{2}\right) - (-0+0)$$

$$= -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

Exercice 4 (environ 8 points)

Soit la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}-2, \text{ si } x\in[1;3[\\ 0, \text{ si } x=3\end{cases}$ et $[a;b] = [1;3]$.

(a) Représenter graphiquement cette fonction.



(b) Calculer $\int_1^3 f(x)\,dx$ avec la définition de l'intégrale en donnant les détails des calculs.

$\Delta x = \frac{3}{n}$; $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{3}{n}$; $x_2 = 2\cdot\frac{3}{n}$; $x_3 = 3\cdot\frac{3}{n}$; ... ; $x_{n-1} = (n-1)\frac{3}{n}$; $x_n = n\cdot\frac{3}{n}$

$s_n = \underbrace{\frac{3}{n}\cdot(-2) + \dots + \frac{3}{n}(-2)}_{n \text{ fois}} = \cancel{n}\cdot\frac{3}{\cancel{n}}(-2) = -6$ /2

$S_n = \underbrace{\frac{3}{n}(-2) + \dots + \frac{3}{n}\cdot(-2)}_{(n-1) \text{ fois}} + \frac{3}{n}\cdot 0 = (n-1)\cdot\frac{3}{n}(-2) = \frac{-6(n-1)}{n} = \frac{-6n+6}{n}$ /3

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-6) = -6$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(-6+6/n)}{\cancel{n}} = -6+0 = -6$ $\Big\}$ donc $\int_0^3 f(x)\,dx = -6$ /3

Exercice 5 (environ 8 points)

Pour chacune des conjectures suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et **justifier précisément votre réponse** en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les définitions et théorèmes vus au cours.

(a) Si f est dérivable sur I, alors f est intégrable sur I

vrai

f dérivable sur I (hypothèse)
donc f continue sur I (thm "dér ⇒ cont" en 3e)
donc f intégrable sur I (thm "cont ⇒ int" en 4e)

1+3

(b) Si f est intégrable sur [0;2], alors $\int_0^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

faux

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2} = 2$$

$$2\int_0^1 x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\cdot\left[\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] = 1$$

1+3

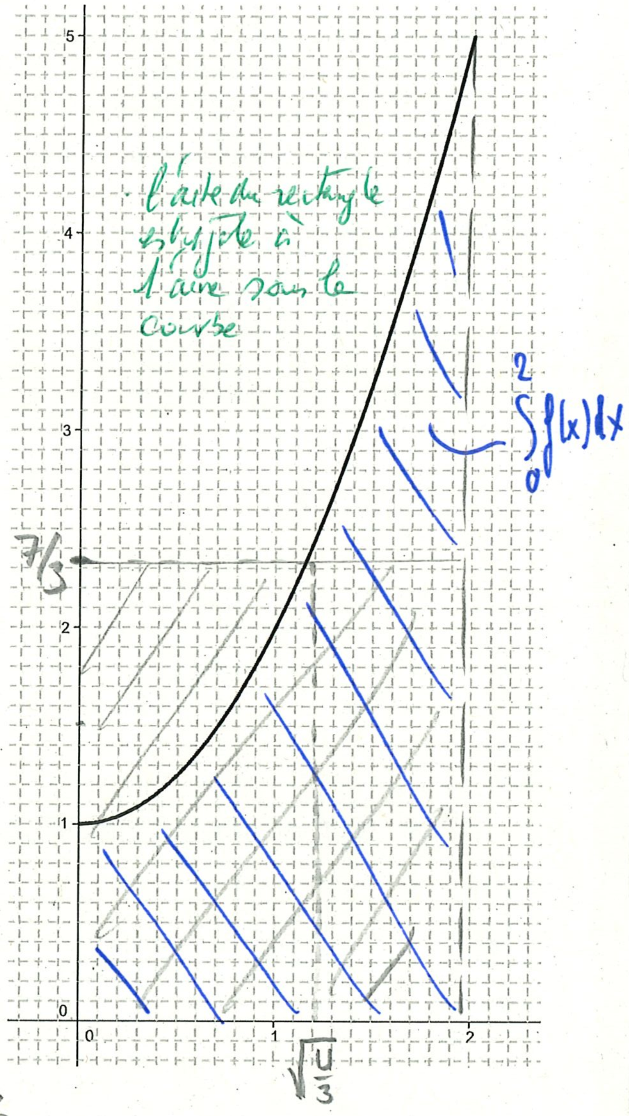
Exercice 6 (environ 7 points)

On considère la fonction f définie sur [0;2] par $f(x)=x^2+1$, et S la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

(a) Peut-on appliquer le théorème de la moyenne dans cette situation? Justifier.

oui, car l'hypothèse " f continue sur [0;2] " est vérifiée

/2



(b) Déterminer la valeur de $d=f(c)$ et de c du théorème de la moyenne appliqué à f sur [0;2]

$$\int_0^2 x^2+1\,dx = f(c)\cdot(2-0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3}+x\Big|_0^2 = f(c)\cdot 2$$

/2

$$\Leftrightarrow \left[\frac{8}{3}+2\right]-\left[\frac{0^3}{3}+0\right]=2f(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}=2f(c) \Leftrightarrow f(c)=\frac{7}{3}=d$$

/2

Puis $c^2+1=\frac{7}{3} \Leftrightarrow c^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

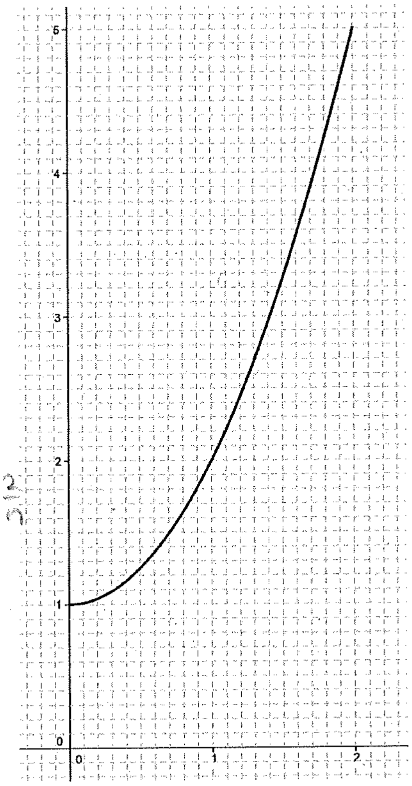
/2

(c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus en (b) sur le repère ci-dessous.

/2

Exercice 7 (environ 17 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x^2+1$, et S la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.



Partie I : on considère un partage de l'intervalle $[0;2]$ en n sous-intervalles égaux.

(a) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_{n-1} et x_n, points frontières de ces sous-intervalles.

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$x_0=0$; $x_1=\frac{2}{n}$; $x_2=2\cdot\frac{2}{n}$; $x_n=(n-1)\frac{2}{n}$; $x_n=n\cdot\frac{2}{n}$

/3

(b) Compléter le calcul de grande somme ci-dessous :

$$S_n=\frac{2}{n}\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{2}{n}\cdot f\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)+\ldots\ldots[etc]\ldots\ldots+\frac{2}{n}\cdot f\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\left[\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+1\right]+\left[\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2+1\right]+\ldots\ldots[etc]\ldots\ldots+\left[\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2+1\right]\right]$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\ldots\ldots[etc]\ldots\ldots+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2+1+1+\ldots\ldots+1\right]$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left(1^2+2^2+\ldots\ldots[etc]\ldots\ldots+n^2\right)+n\right]$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)+n\right]$$

/7

$$=\frac{8n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3}+\frac{2}{n}\cdot n$$

$$=\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}+2$$

(c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ en donnant les détails des calculs.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} + 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(8 + 12/n + 4/n^2)}{3\cancel{n^2}} + 2$$

$$= \frac{(8+0+0)}{3} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

/4

(d) Est-il nécessaire de calculer encore $\lim_{n \to +\infty} s_n$ pour connaître $\int_0^2 f(x)\,dx$? Justifier.

non, comme f est continue sur $[0;2]$, elle est intégrable sur $[0;2]$ et donc on sait que $\lim_{n\to\infty} s_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{=\frac{14}{3}} = \int_0^2 f(x)\,dx$

/3