Exercice 1 (environ 9 points)

(a) Déterminer une primitive de la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{-4x}{(3x^2+1)^2}$ (donner une réponse sans exposant négatif ou fractionnaire, réduite au maximum.

$f(x) = -4x\,(3x^2+1)^{-2} = -\frac{4}{6}\left[(3x^2+1)^{-2}\,6x\right]$

/4

$F(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{(3x^2+1)^{-1}}{-1} = \frac{2}{3(3x^2+1)}$

(b) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{-4x}{3x^2+1}\,dx$. Donner une réponse simplifiée au maximum.

$f(x) = \frac{-4x}{3x^2+1} = -\frac{4}{6}\cdot\frac{6x}{3x^2+1} = -\frac{2}{3}\left[\frac{6x}{3x^2+1}\right]$

/3

$\Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}\ln|3x^2+1|$

$I = -\frac{2}{3}\ln|3x^2+1|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|4| - \left(-\frac{2}{3}\underbrace{\ln|1|}_{=0}\right)$

/2

$= -\frac{2}{3}\ln(4)\left(= -\frac{2}{3}\ln(2^2) = \frac{2}{3}\cdot 2\ln(2) = -\frac{4}{3}\ln(2)\right)$

Exercice 1 (environ 9 points)

(a) Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\frac{-4x}{(3x^2+1)^2}$ (donner une réponse sans exposant négatif ou fractionnaire, réduite au maximum.

$f(x) = -4x\,(3x^2+1)^{-2} = -\frac{4}{6}\left[(3x^2+1)^{-2}\,6x\right]$

$F(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{(3x^2+1)^{-1}}{-1} = \frac{2}{3(3x^2+1)}$

/4

(b) Calculer $I=\int_0^1 \frac{-4x}{3x^2+1}\,dx$. Donner une réponse simplifiée au maximum.

$f(x) = \frac{-4x}{3x^2+1} = \frac{-4}{6}\cdot\frac{6x}{3x^2+1} = -\frac{2}{3}\left[\frac{6x}{3x^2+1}\right]$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}\ln|3x^2+1|$

/3

$I = -\frac{2}{3}\ln|3x^2+1|\,\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|4| - \left(-\frac{2}{3}\underbrace{\ln|1|}_{=0}\right)$

/2

$= -\frac{2}{3}\ln(4) \left(= -\frac{2}{3}\ln(2^2) = -\frac{2}{3}\cdot 2\ln(2) = -\frac{4}{3}\ln(2)\right)$

Exercice 2 (environ 9 points)

(a) Soit la fonction définie par $f(x)=\frac{2}{e^x}$

i. Déterminer sa dérivée :

$$\left(\frac{2}{e^x}\right)' = (2e^{-x})' = 2(e^{-x})' = 2e^{-x}\cdot(-x)' = 2\cdot e^{-x}(-1) = -2e^{-x}$$
$$= -\frac{2}{e^{+x}}$$

/3

ii. Déterminer une primitive de f:

$$f(x) = 2e^{-x} = -2\cdot\left[e^{-x}(-1)\right]$$

$$\Rightarrow F(x) = -2\cdot\left[e^{-x}\right] = -2e^{-x} = \frac{-2}{e^x}$$

3/3

(b) Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$:

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

/3

Exercice 3 (environ 8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2}\cdot e^{x}-e^{\sqrt{2}\cdot x}$.

(a) Déterminer une primitive de f.

$f(x) = \sqrt{2}\, e^{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\sqrt{2}x} \cdot \sqrt{2}\right]$

$\hookrightarrow F(x) = \sqrt{2}\, e^{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\sqrt{2}x}$

/4

(b) Déterminer toutes les primitives de f.

$F(x) = \sqrt{2}\, e^{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\sqrt{2}x} + C$

/1

(c) Déterminer la primitive F de f telle que $F(0)=1$

$\sqrt{2}\, e^{0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\sqrt{2}\cdot 0} + C = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 + C = 1$

$\Leftrightarrow \quad C = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

/3

$F(x) = \sqrt{2}\, e^{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\sqrt{2}x} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4 (environ 8 points)

Déterminer si les conjectures suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

(a) Les fonctions f et g définies par $f(x)=-2\ln(x)$ et $g(x)=\ln(\frac{1}{x^2})$ sont primitives d'une même fonction.

$(-2\ln(x))' = -2\cdot\frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

$(\ln(\frac{1}{x^2}))' = (\ln(x^{-2}))' = (-2\ln(x))' = -2\frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

c'est vrai !

[ou $g(x) = \ln(x^{-2}) = -2\ln(x) = f(x)$! fonctions identiques donc c'est vrai !

/3

(b) Les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x)=-2\ln(x)$ et $g(x)=\ln(\frac{1}{x^2})$ ont un unique point d'intersection.

cf (a) f et g primitives d'une même fonction donc elles diffèrent d'une constante + thm "2 primitives"
donc leurs courbes repr sont une translation verticale l'une de l'autre ou sont identiques
elles n'ont donc pas un unique pt d'intersection !

[ici $f(x)=g(x)$ les courbes sont identiques]

/3

C'est faux !

(c) La fonction h définie par $h(x)=e^{\ln(x^3+x)}$ n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}$.

$h(x) = \exp(\ln(x^3+x))$ [notations]
$= x^3+x$ [exp et ln sont réciproques l'une de l'autre]

$(x^3+x)' = 3x^2+1 > 0$, donc h n'admet aucun extremum [cf TAF]

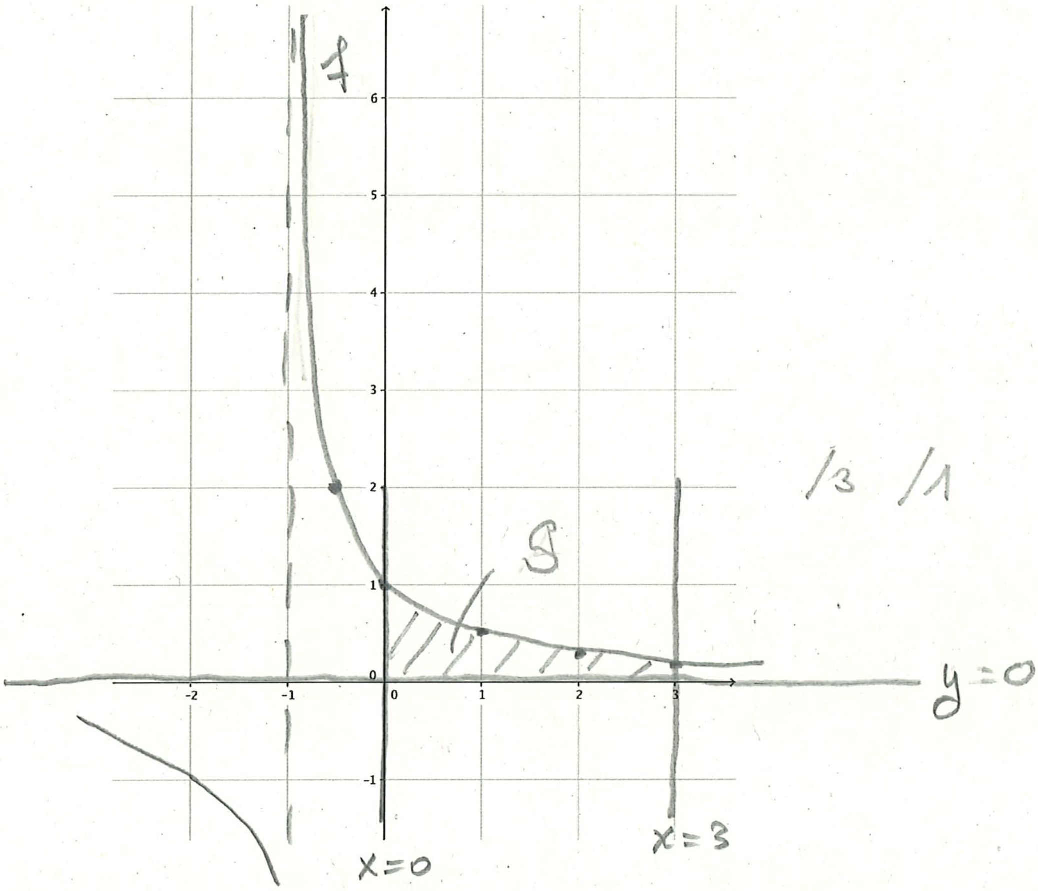
c'est donc vrai

/3

Exercice 5 (environ 1~~4~~3 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x+1}$ et la surface S délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=3$.

(a) Représenter graphiquement f puis S.



/3 /1

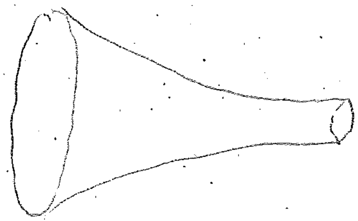
(b) Calculer l'aire A de S.

$$A = \int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| \Big|_0^3 = \ln|4| - \ln|1| = \ln(4) \quad (= 2\ln 2)$$

/2 /2

On considère le solide de révolution R obtenu en faisant tourner S autour de l'axe Ox

(c) Esquisser un dessin en perspective du solide R.



1/2

(d) Calculer le volume V de R.

$$V = \pi \int_0^3 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \pi \int_0^3 (x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{(x+1)^{-1}}{-1} \Big|_0^3 \right) = \pi \left(-\frac{1}{x+1} \Big|_0^3 \right)$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{4} - (-1) \right] = \pi \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

1/2

Exercice 6 ***(Facultatif : max environ 5 points)***

On considère une fonction f donnée par sa représentation graphique. Représenter graphiquement sur le même repère et sur l'intervalle [-5;7] la fonction F définie sur [-5;7] par $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$.

Donner les justifications nécessaires.