Mini-test de mathématiques	
Date : 13 septembre 2022 Durée : 20' Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 4Ma1.DF01 **Nom** : .... **Prénom :** .... **Groupe :**	Matériel autorisé : - Remarques : il ne suffit pas de répondre par un nombre ; **donner tous les détails des calculs.** Notation : .... /........ Points : .... /........ Note : ……... /6

Début du travail

Exercice 1

Compléter les [……………..] :

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + 1$, et *S* la surface délimitée par la courbe représentative de *f*, l'axe O*x* et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Partie I : on considère un partage de l'intervalle [1;3] en *n* sous-intervalles égaux de longueur

$$\Delta x = \frac{2}{n} \;,$$

puis les sous-intervalles $[x_i ; x_{i+1}]$ pour $i = 0,1,.., \; n-1$

avec :

$$x_0 = 1 \;,\; x_1 = 1 + \frac{2}{n} \;,\; x_2 = 1 + 2\cdot\frac{2}{n}$$

$$\dots \quad x_{n-1} = 1 + (n-1)\cdot\frac{2}{n} \;,\; x_n = 1 + n\cdot\frac{2}{n} = 3$$

On calcule la grande somme de Riemann :

$$S_n \quad = \quad \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f([......]) + \ldots + \Delta x\, f([......])$$

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{2}{n}\left(1+(1+\frac{2}{n})^2\right)+\frac{2}{n}\left(1+(1+2\cdot\frac{2}{n})^2\right)+\frac{2}{n}\left(1+(1+3\cdot\frac{2}{n})^2\right)+\ldots+\frac{2}{n}\left(1+(1+n\cdot\frac{2}{n})^2\right)\\
&= \frac{2}{n}\left[\left(1+(1+\frac{2}{n})^2\right)+\left(1+(1+2\cdot\frac{2}{n})^2\right)+\left(1+(1+3\cdot\frac{2}{n})^2\right)+\ldots+\left(1+(1+n\cdot\frac{2}{n})^2\right)\right]\\
&= \frac{2}{n}\left[(1+1+1\ldots+1)+(1+\frac{2}{n})^2+(1+2\cdot\frac{2}{n})^2+(1+3\cdot\frac{2}{n})^2+\ldots+(1+n\cdot\frac{2}{n})^2\right]\\
&= \frac{2}{n}\left[n+(1+\frac{2}{n})^2+(1+2\cdot\frac{2}{n})^2+(1+3\cdot\frac{2}{n})^2+\ldots+(1+n\cdot\frac{2}{n})^2\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[(1+\frac{2}{n})^2+(1+2\cdot\frac{2}{n})^2+(1+3\cdot\frac{2}{n})^2+\ldots+(1+n\cdot\frac{2}{n})^2\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}(1+2\cdot\frac{2}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2)+\frac{2}{n}(1+2\cdot2\cdot\frac{2}{n}+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2)+\frac{2}{n}(1+2\cdot3\cdot\frac{2}{n}+\left(3\cdot\frac{2}{n}\right)^2)+\ldots+\frac{2}{n}(1+2\cdot n\cdot\frac{2}{n}+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2)\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[(1+2\cdot\frac{2}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2)+(1+2\cdot2\cdot\frac{2}{n}+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2)+(1+2\cdot3\cdot\frac{2}{n}+\left(3\cdot\frac{2}{n}\right)^2)+\ldots+(1+2\cdot n\cdot\frac{2}{n}+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2)\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[(1+1+\ldots+1)+2\cdot\frac{2}{n}(1+2+3+\ldots+n)+\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2\right)\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[(1+1+\ldots+1)+2\cdot\frac{2}{n}(1+2+3+\ldots+n)+\left(\frac{2}{n}\right)^2(1+2^2+\ldots+n^2)\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[n+2\cdot\frac{2}{n}\,\frac{n(n+1)}{2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[n+2(n+1)+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]\\
&= 2+\frac{2}{n}\left[n+2(n+1)+\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n}\right]\\
&= 2+2+\frac{4(n+1)}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\\
&= 4+\frac{4(n+1)}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}
\end{aligned}
$$

puis on calcule la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 4+\frac{4(n+1)}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 4+\frac{4(n+1)}{n}+\frac{8n^2+6n+4}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 4+\lim_{n\to+\infty}\frac{n(4+\frac{1}{n})}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(8+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2})}{3n^2}$$

$$=4+\lim_{n\to+\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}{3}\right)$$

$$=4+4+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$$

On calcule de la même façon la petite somme et on trouve la même limite.

On en déduit que la fonction f est intégrable sur [1;3] et on note $\int_1^3 x^2+1\,\mathrm{d}\,x=\frac{32}{3}$