| **Mini-test de mathématiques** | |
|---|---|
| Date : 28 février 2023<br>Durée : 20'<br>Enseignant : Jean-Marie Delley<br>Cours : 4Ma2.DF01<br>**Nom :** .......................................................<br><br>**Prénom :** ..................................................<br><br>**Groupe :** .................................................. | Matériel autorisé : calculatrice et table<br><br><br>Notation : ......... /........<br>Points : ......... /........<br>Note : ......... /6 |

## Début du travail

**Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »**

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ à termes positifs et la limite $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c$ .

i) Si $c < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

ii) Si $c > 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

iii) Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

# Remplir les [……………….] donner les [ARG :………]

**Démonstration**

i) On sait que $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c < 1$ , car [ARG : ……………………………………….……………...…….]

On peut choisir un $q$ tel que [……..] < [……..] < 1

donc il existe un $n_0$ tel que $[.................] \Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} < q$ ,

On obtient ainsi : $u_{n_0+1} < q \cdot u_{n_0}$

puis : $u_{n_0+2} < q \cdot u_{n_0+1} < [..........................]$

et : $u_{n_0+k} < u_{n_0} \cdot$[.........................................]

Or on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge, car [ARG : ………………………………………...………..]

comme $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \cdot u_{n_0} = u_{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ , car [ARG : …………..……..……………………...……..]

on a : $u_{n_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge

On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_0+k}$ converge,

car [ARG : ……………………….………………………………….……..………..]

et donc que […………….…..………..]converge,

ii) La démonstration est quasi identique : seule différence, on utilise le fait que $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ [……………......………..], car dans ce cas $q$ est [ …………..…...………..]

iii) On considère la série […………………. ] : on a $c$ = 1 et la série diverge.

On considère la série […………………. ] : on a $c$ = 1 et la série converge.