Collège de Saussure Epreuve de mathématiques de 4e année, niveau avancé	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	4 octobre 2022
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • la calculatrice peut être utilisée pour vérification.

Nom : ……………………………………….. Prénom : ………………... Groupe : …….

Répartition des points

Exercice 1 : 15 points

Exercice 2 : 6 points

Exercice 3 : 13 points

Exercice 4 : 11 points

Exercice 5 : 15 points

Exercice 6 : 6 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Total : ……. / 68 points

Note : ………/ 6

Début du travail

Exercice 1 (environ 15 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $f(x) = -\sqrt{3}(2x)^5$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = -2x^2 \cdot (x^3+1)^{15}$

(d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{-2\sqrt{x^3+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{-2x^2}$

Exercice 2 (environ 6 points)

Soit *f* définie par $f(x) = 5\sin(x)(\cos(x)-1)^4$. Déterminer la primitive *F* de *f* telle que $F(\pi) = -8$.

Exercice 3 (environ 13 points)

Soit *f* définie par $f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } & x \in]0;4] \\ 2, \text{si } & x = 0 \end{cases}$.

(a) Représenter graphiquement *f*.

(b) Calculer $I = \int_0^4 f(x) \mathrm{dx}$ en utilisant avec soin la définition de l’intégrale.

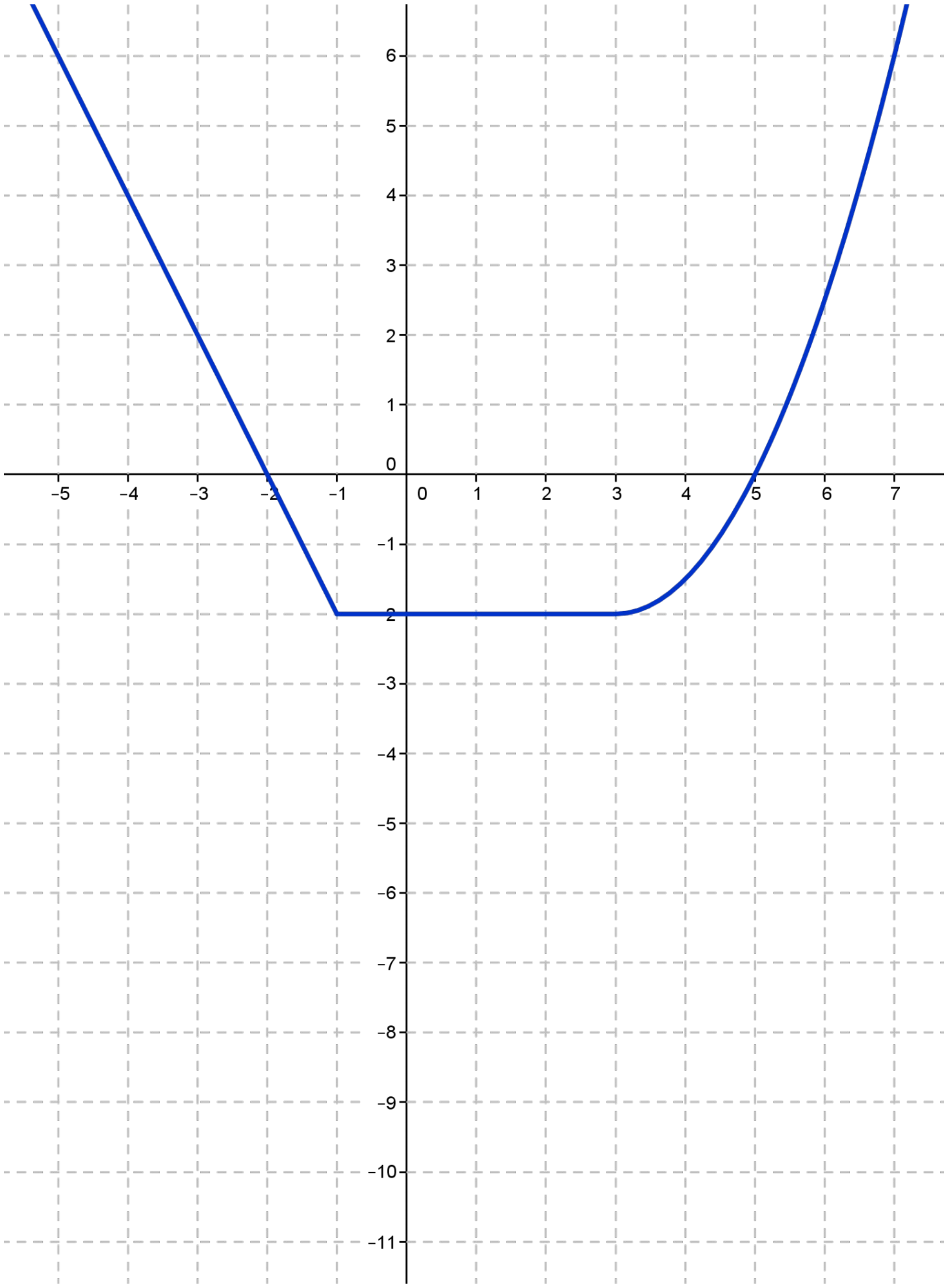
Soit *g* définie par $g(x) = \begin{cases} 1, \text{si } & x \in]0;1] \\ 2, \text{si } & x \in]1;2] \end{cases}$. On admet avoir calculé que $J = \int_0^2 g(x) \mathrm{dx} = 3$

(c) L’hypothèse du théorème de la moyenne est-elle vérifiée pour *g* sur [0;2] ?

(d) La conclusion du théorème de la moyenne est-elle vérifiée pour *g* sur [0;2] ?

Exercice 4 (environ 11 points)

On considère une fonction *f* donnée par une représentation graphique :



(a) Représenter graphiquement sur repère ci-dessous et sur l'intervalle [-5;7] la fonction F définie sur [-5;7] par $F(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$.

(b) On considère maintenant la fonction G définie sur [-5;7] par $G(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$. Que peut-on dire de sa représentation graphique par rapport à celle de F ? La représenter.

Exercice 5 (environ 15 points)

Soit *f* et *g* définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=m$, avec $m>0$.

On considère le domaine *D* défini par les courbes représentatives de *f* et *g*.

(a) Faire un schéma de la situation.

(b) Montrer que l'aire *A* de *D* est égale à $\frac{4}{3}m\sqrt{m}$.

(c) Déterminer *m* pour que l'aire *A* de *D* soit égale à $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

On pose maintenant *m*=1 et on considère le solide de révolution *S* obtenu par la rotation de *D* autour de l'axe *Ox*.

(d) Déterminer les points d'intersection de *f* et *g*.

(e) Calculer le volume *V* de *S*.

(f) Représenter approximativement *S*.

Exercice 6 (environ 6 points)

Vrai ou faux ? Justifier.

(a) Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors $f(x)=g(x), \forall x\in[a;b]$

(b) Si $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ et $\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2$, alors $\int_5^1 -2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=16$