Collège de Saussure Epreuve de mathématiques de 4e année, niveau avancé	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	21 mars 2023
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • la calculatrice peut être utilisée pour vérification.

Nom : …………………………………….. Prénom : ………………... Groupe : ……

Répartition des points

Exercice 1 : 10 points

Exercice 2 : 22 points

Exercice 3 : 18 points

Exercice 4 : 12 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Total : ……. / 64 points

Note : ……… /6

Début du travail

Exercice 1 (environ 10 points)

Soit S la symétrie par rapport à une droite de pente positive qui passe par l’origine et qui forme un angle de 60◦ avec l’axe Ox et R une rotation de 60° autour de l’origine (dans le sens trigonométrique).

(a) Déterminer les matrices M_S et M_R associées aux deux applications linéaires (dans la base canonique).
On ne demande pas ici de justification ; vous pouvez utiliser les résultats connus vus au cours. Donner les résultats exacts simplifiés au maximum (sans expression trigonométrique).

(b) Déterminer la matrice associée à la composition $S \circ R$ des deux applications linéaires (dans la base canonique).

(c) Décrire géométriquement l’application linéaire associée à $S \circ R$, en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice 2 *(environ 22 points)*

On considère l’application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ -2x + 6y \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que L est linéaire.

(b) Déterminer Ker(L) et Im(L).

(c) Représenter graphiquement $\mathrm{Ker}(L)$ et $\mathrm{Im}(L)$.

(d) Déterminer les valeurs propres et une base propre de L (*par méthode de votre choix*).

(e) Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier par un calcul, par un raisonnement ou par un contre-exemple :

i. L n’admet pas de réciproque.

ii. L n’est pas diagonalisable.

Exercice 3 (environ 18 points)

Soit S la symétrie par rapport à l’axe d’équation $y = 6x$.

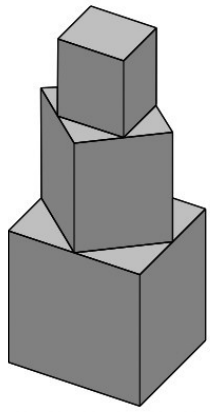
Attention : on désire tous les résultats sous forme de fraction (et non en écriture décimale), sans fonctions trigonométriques.

(a) Déterminer une base propre B de S en justifiant votre approche.

(b) Déterminer la matrice de S dans B.

(c) En déduire la matrice de S dans la base canonique.

Exercice 4 (environ 12 points)



Sur un cube de 1 mètre d’arête, on pose un deuxième cube de sorte que les sommets de la base du deuxième cube coïncident avec les milieux de la face supérieure du premier cube.

De la même manière, on pose un troisième cube sur le deuxième et ainsi de suite (voir la figure ci-contre).

(a) Montrer que la hauteur de cette pile est une série géométrique ; donner sa raison et son premier terme.

(b) Vers quelle hauteur cette pile de cubes tend-t-elle si on poursuit indéfiniment cet empilement ?

Indication : si vous n’avez pas trouvé la réponse en (a), répondez pour (b) en utilisant la série

$2+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}+\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2}+\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^3}+\ldots+\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^n}+\ldots$ *(qui n’est pas la bonne réponse pour (a))*