<table>
<tr><td colspan="2">Collège de Saussure

Epreuve de mathématiques de 4e année, niveau avancé</td></tr>
<tr><td>Maître</td><td>Jean-Marie Delley</td></tr>
<tr><td>Date</td><td>5 mai 2023</td></tr>
<tr><td>Durée</td><td>90 minutes</td></tr>
<tr><td>Documents et matériel autorisés</td><td>personnels :
• table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ;
• calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).</td></tr>
<tr><td>Consignes</td><td>• répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;
• la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ;
• toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ;
• la calculatrice peut être utilisée pour vérification.</td></tr>
</table>

Nom : …………………………………….. Prénom : ………………... Groupe : …….

Répartition des points

Exercice 1 : 8 points

Exercice 2 : 9 points

Exercice 3 : 7 points

Exercice 4 : 10 points

Exercice 5 : 7 points

Exercice 6 : 6 points

Exercice 7 : 8 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Total : ……. / 57 points

Note : ……… /6

Début du travail

Exercice 1 (environ 11 points)

Déterminer si les séries suivantes convergent ou non (nommer à minima l’outil utilisé et plus du détail des calculs):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1000}$

Exercice 2 (environ 9 points)

Déterminer l’intervalle de convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k} x^k$

Exercice 3 (environ 7 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\int_0^x t\cdot\arctan(t)\,dt$.

Utiliser le développement de Mac Laurin de arctan (cf table) pour déterminer celui de *f*.

Donner le terme général de la série entière obtenue.

Exercice 4 (environ 10 points)

(a) Approximer cos(1) en utilisant un polynôme de MacLaurin de degré 4 ; donner le résultat arrondi au 10^{-8} ème

(b) Estimer l’erreur commise.

(c) Utiliser la calculatrice pour donner une approximation directe de cos(1) au 10^{-8} ème.

(d) Les résultats de (a) et (c) sont-ils bien cohérents avec celui de (b) ?

Exercice 5 (environ 7 points)

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Si $a_n > 1, \forall n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

(b) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n)^2$ converge, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

Exercice 6 (environ 6 points)

Soit la suite de terme général $s_n = \frac{3}{n} + 1, n \geq 0$. Trouver la valeur de $N \in \mathbb{N}$ telle que :

(a) $|s_n - 1| < 0,1 \text{ , } \forall n \geq N$

(b) Montrer qu'elle converge vers $s = 1$ en utilisant la définition formelle de convergence.

Exercice 7 (environ 8 points)

Dans un carré de 1 m de côté, on inscrit un cercle. Puis dans ce cercle on inscrit un carré, puis dans le nouveau carré un cercle, etc. On construit ainsi une infinité de carrés.

Quelle est la somme des aires des carrés ?