MA4N – Travail n° 4 – Corrigé

ex1 [/8]

a) • $\frac{n-1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \iff n^3 - n^2 \leq n^3$
$\iff 0 \leq n^2$ ok si $n \geq 0$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

donc, par "critère de comparaison", la série converge /4

b) $\lim_{n\to\infty} (e^{-n}+1) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^n}+1\right) = 0+1 = 1 \neq 0$

donc, par "critère de divergence", la série ne converge pas

c) • $a_n = \frac{1}{n+100} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

• la série est alternée

donc, par critère "série alt", la série converge /4

ex2 [/9]

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+2}}{5^{k+1}} |x^{k+1}| : \frac{5^k}{3^{k+1}|x|^k} = \frac{3}{5}|x| \lim_{k\to\infty} 1 = \frac{3}{5}|x|$

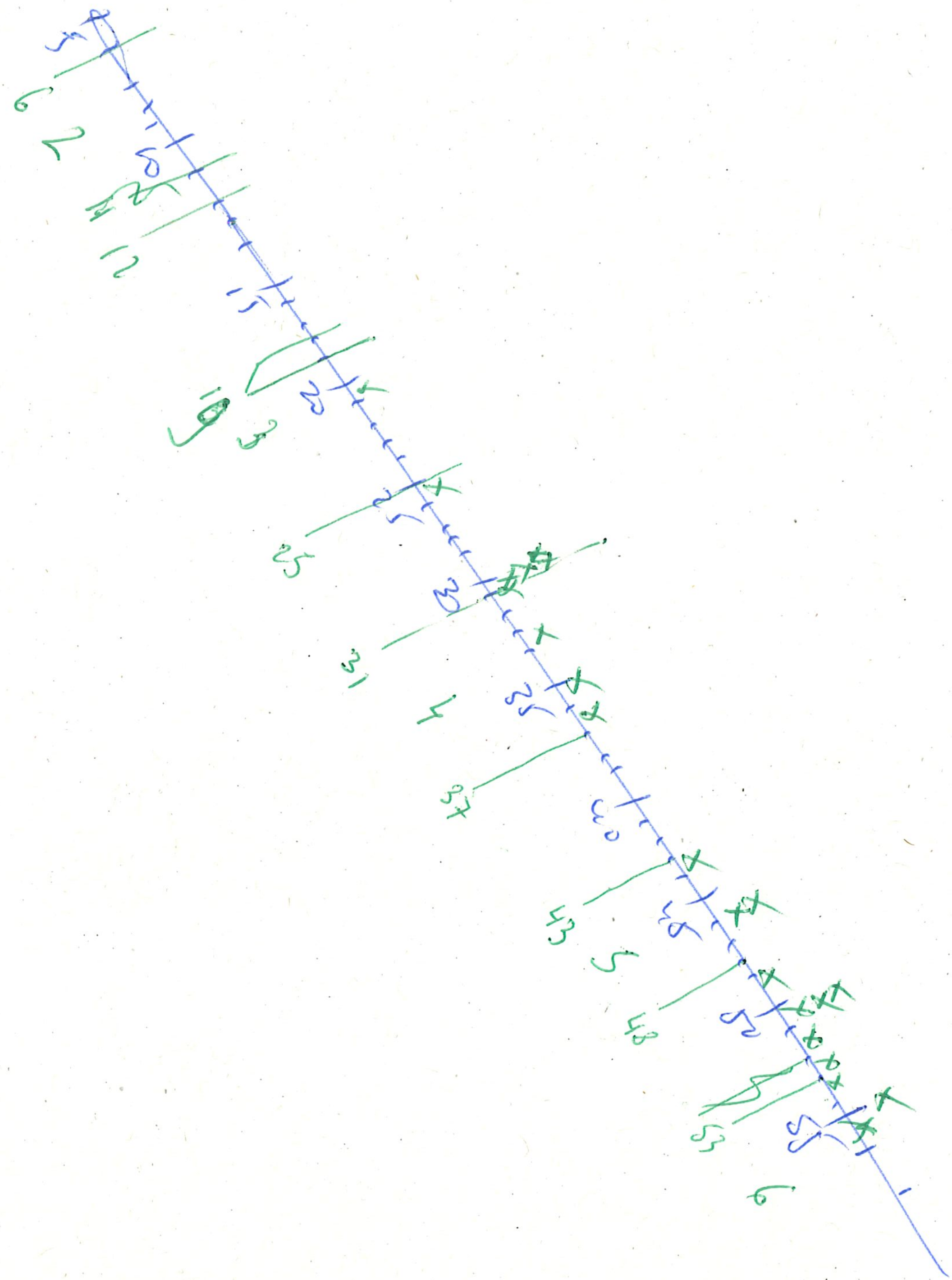
• si $\frac{3}{5}|x| < 1 \iff |x| < \frac{5}{3}$: la série converge

• si $\frac{3}{5}|x| > 1 \iff |x| > \frac{5}{3}$: " " diverge /4

• si $x = \frac{5}{3}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}\left(\frac{5}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3$ diverge /2

• si $x = -\frac{5}{3}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}\left(\frac{-5}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{k+1}}{5^k}\cdot\frac{5^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 3 = 3-3+3-3+\dots$ oscille /2

donc $I = \left]-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right[$ /1



ex3 table : $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \forall |x| \leq 1$

[/7] donc $t \cdot \arctan(t) = t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} - \frac{t^8}{7} + \dots \quad \forall |t| \leq 1$

et $\int_0^x t \cdot \arctan(t)\,dt = \int_0^x \left(t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} - \frac{t^8}{7} + \dots\right) dt = \left.\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{3\cdot 5} + \frac{t^7}{5\cdot 7} - \frac{t^9}{7\cdot 9} + \dots\right|_0^x$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{5\cdot 7} - \frac{x^9}{7\cdot 9} + \dots + \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}}_{\text{terme général}} + \dots$ /5

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ /2

ex4 table : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$

[/10] (a) $\cos(1) \cong 1 - \frac{(1)^2}{2!} + \frac{(1)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \cong 0{,}54166667$ /3 /1

(b) $R_4(1) \leq \left[\max_{[0;1]}\left(\cos^{(5)}(t)\right)\right] \cdot \frac{(1-0)^5}{5!} \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0{,}008\overline{3}$ /3

(c) $\cos(1) \overset{\text{calc}}{=} 0{,}54030231$ /1

(d) $|0{,}54166667 - 0{,}54030201| = 0{,}00136466 < 0{,}008\overline{3}$
c'est ok /2

ex 5

|/7|

(a) Hypothèses : $a_n > 1 \ \forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

incompatible ! si tous les termes sont > 1, $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$

et donc $\sum_1^{\infty} a_n$ doit diverger

une implication dont les hypothèses sont impossibles est toujours ... vraie !

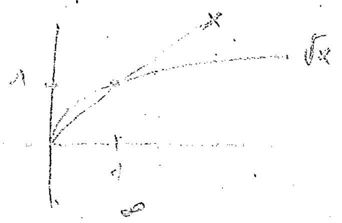
$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$$

si A impossible (tjs fausse)

alors non A toujours vraie ! /4

Si on ne le voit pas en écrivant :

$\sqrt{a_n} \leq a_n \ \forall n \geq 1$ car $\forall a_n > 1$



on a bien $\sqrt{x} < x \ \forall x \geq 1$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge également par critère de comparaison.

C'est vrai /4

(b) Faux ; contre-exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ;

mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge /3

ex6 $\quad S_n = \frac{3}{n} + 1$, $n \geq 0$

[/6] (a) $|s_n - 1| = |\frac{3}{n} + 1 - 1| = |\frac{3}{n}| < 0,1 \iff \frac{3}{n} < 0,1 \iff \frac{3}{0,1} < n$

$\iff 30 < n \iff 31 \leq n$ $\quad$ /2

(b) Soit $\varepsilon > 0$. On veut $|S_n - 1| < \varepsilon \iff \frac{3}{n} < \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} < n$

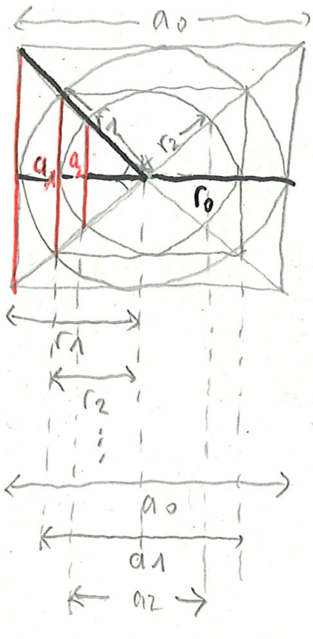
Posons $N = [\frac{3}{\varepsilon}] + 1$: on a alors

$n \geq N \iff n \geq [\frac{3}{\varepsilon}] + 1 > \frac{3}{\varepsilon} \iff |s_n - 1| < \varepsilon$

donc $\{S_n\}$ converge bien vers 1 $\quad$ /4

ex7

[/8]



$a_0 = 1$ et $r_0 = \frac{1}{2}$

On a : $r_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, donc $a_1^2 = r_1^2 + r_1^2$

$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$r_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, donc $a_2^2 = r_2^2 + r_2^2$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

$r_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{2})^2}$, donc $a_3^2 = r_3^2 + r_3^2$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$a_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^3$

$\vdots$

$r_n = \frac{1}{2(\sqrt{2})^{n-1}}$ et $a_n = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$

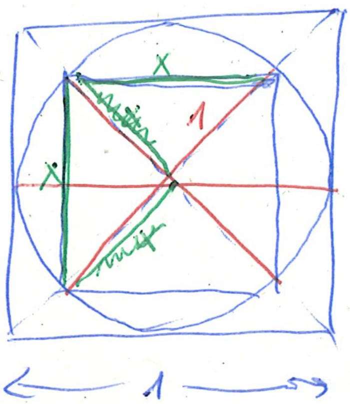
Aire des carrés : $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 + \dots$

$= 1^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + \dots + (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n} + \dots$ $\quad$ série géom. de raison $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$ $\quad$ /7

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

/1

ou



$n=0: \quad x = 1$

$n=1: \quad x^2 + x^2 = 1^2$

$2x^2 = 1$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=2: \quad x^2 + x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$2x^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=3: \quad x^2 + x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$2x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

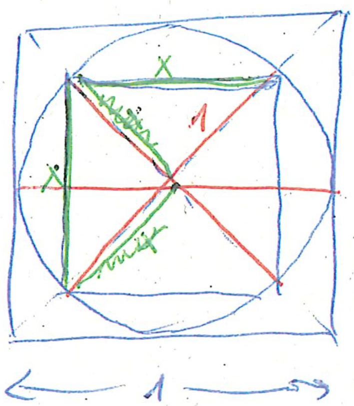
donc Aire : $1 \cdot 1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \to$

$= 1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{8} \to \cdots$

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme 1

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

ou



$n=0: \quad x=1$

$n=1: \quad x^2+x^2=1^2$

$2x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=2: \quad x^2+x^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$2x^2=\frac{1}{2}$

$x^2=\frac{1}{4}$

$x=\frac{1}{2}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=3: \quad x^2+x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$2x^2=\frac{1}{4}$

$x^2=\frac{1}{8}$

$x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc Aires : $1\cdot 1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} \to$

$= 1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{8} \to \cdots$

$A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme 1

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$