Théorème fondamental II (du calcul différentiel et intégral) : calculer une intégrale
Théorème de Newton-Leibnitz

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in I$, $b \in I$ et G une primitive de f sur $[a;b]$.

Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Démonstration

Soit F la primitive issue du théorème fondamental :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } x \in [a;b] \text{ et } x_0 = a$$

F existe, car

[ARG 1 : ....]

F et G sont deux primitives de f, car

[ARG 2 : ....]

donc $F(x) = G(x) + c, \forall x \in [a;b]$, car

[ARG 3 : ....]

La constante est la même pour tout $x \in [a;b]$, donc on peut choisir un x qui nous arrange;

choisissons $x = a$; on obtient :

$F(a) = G(a) + c$, car

[ARG 4 : ....]

càd : $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = G(a) + c$, car

[ARG 5 : ....]

d'où : $0 = G(a) + c$,

[ARG 6 : ....]

et : $c = - G(a)$, car

[ARG 7 : ....]

choisissons maintenant $x = b$; on obtient : $F(b) = G(b) + c$, car

[ARG 8 : ....]

càd :$F(b) = G(b) - G(a)$, car

[ARG 9 : ....]

d'où : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$, car

[ARG 10 : ....]