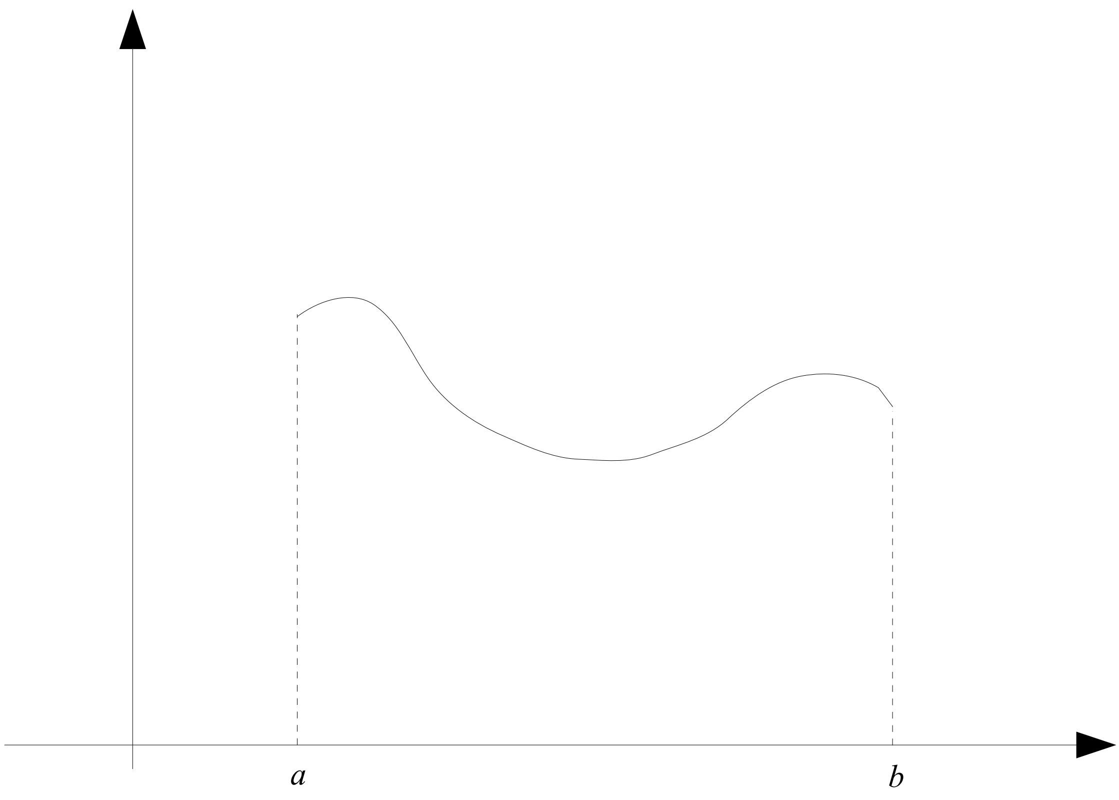
Théorème de la moyenne

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$.
Alors il existe au moins un $c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$

Démonstration :
On donne ci-dessous une démonstration du théorème de la moyenne:

Cas 1 : si f est une fonction constante, le théorème est évident.

Cas 2 : soit f une fonction non constante



il existe deux nombres *m* et *M* tels que $f([a;b])=[m;M]$, car

[ARG 1 : ....]

on a : $m\leq f(x)\leq M$, car

[ARG 2 : ....]

d'où : $\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x$, car

[ARG 3 : ....]

càd : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$, car

[ARG 4 : ....]

$\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$, car

[ARG 5 : ....]

Posons $d = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

On a : il existe au moins un $c \in [a;b]$ tel que *f(c)=d*, car

[ARG 6 : ....]

càd : $f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

d'où : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a)$, car

[ARG 7 : ....]

a) Donner les arguments qui manquent.

b) Pourquoi appelle-t-on ce théorème « théorème de la moyenne ».