ACTIVITE 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites *x*=0 et *x*=1:

On partage $[0;1]$ en n intervalles équidistants de longueur et on note

On pose : $x_0 = 0$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n) \quad \left(=\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots \qquad\qquad\right)\\
&= \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{2^2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3^2}{n^2}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)
\end{aligned}$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n =$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1}) \quad \left(=\sum_{\ldots}^{\ldots} \ldots \qquad\qquad\right)\\
&= \frac{1}{n} f(0)+\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(2\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(3\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n} f\left((n-1)\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}(0)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(2\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(3\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left((n-1)\frac{1}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)
\end{aligned}$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=$

et donc: $s_n =$

Remarque : on a toujours $s_n < A < S_n$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} =$$

On avait $s_n < A < S_n$, donc maintenant :

C'est-à-dire :

Donc

On dit que ***f* est intégrable** sur [0;1] (au sens de Riemann)

et on note $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ ou $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$