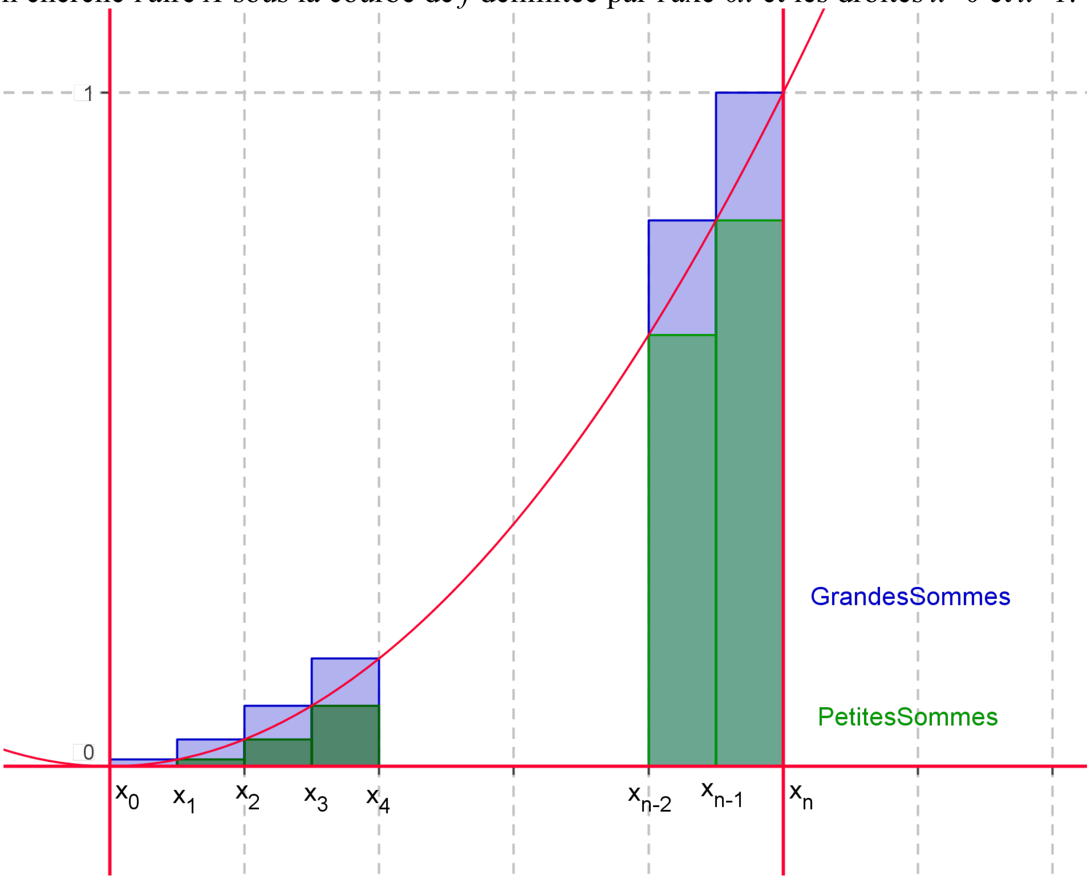
ACTIVITE 7

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites $x=0$ et $x=1$:



On partage $[0;1]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

On pose : $x_0=0$

$$x_1=0+\Delta x=\frac{1}{n}$$

$$x_2=0+2\Delta x=\frac{2}{n}$$

$$x_3=0+3\Delta x=\frac{3}{n}$$

...

$$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=\frac{n-1}{n}$$

$$x_n=0+n\Delta x=\frac{n}{n}=1$$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n) \quad \left(=\sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{2^2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3^2}{n^2}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)
\end{aligned}$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1}) \quad \left(=\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x\, f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{n} f(0)+\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(2\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(3\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n} f\left((n-1)\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}(0)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(2\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(3\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left((n-1)\frac{1}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)
\end{aligned}$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue *n* par *n*-1 et on obtient:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

et donc: $s_n = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

Remarque : on a toujours $s_n < A < S_n$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On avait $s_n < A < S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (propriété des limites)

C'est-à-dire : $\frac{1}{3} \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$

Donc $A = \frac{1}{3}$

On dit que ***f*** **est intégrable** sur [0;1] (au sens de Riemann)
et on note $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ ou $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$