ACTIVITE 8

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ et soit $b\geq 0$

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0x et les droites *x*=0 et *x*=*b*.

On considère donc maintenant l'intervalle [0;*b*].

On partage $[0;b]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{b}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{b}{n}$

On pose : $x_0=0$

$$x_1=0+\Delta x=\frac{b}{n}$$

$$x_2=0+2\Delta x=2\cdot\frac{b}{n}$$

$$x_3=0+3\Delta x=3\cdot\frac{b}{n}$$

...

$$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{b}{n}$$

$$x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{b}{n}=b$$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{b}{n}f(\frac{b}{n})+\frac{b}{n}f(2\cdot\frac{b}{n})+\frac{b}{n}f(3\cdot\frac{b}{n})+\ldots+\frac{b}{n}f(n\cdot\frac{b}{n})\\
&= \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2+\frac{b}{n}(2\cdot\frac{b}{n})^2+\frac{b}{n}(3\cdot\frac{b}{n})^2+\ldots+\frac{b}{n}(n\cdot\frac{b}{n})^2\\
&= \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})\\
&= \frac{b}{n}f(0)+\frac{b}{n}f(\frac{b}{n})+\frac{b}{n}f(2\cdot\frac{b}{n})+\frac{b}{n}f(3\cdot\frac{b}{n})+\ldots+\frac{b}{n}f((n-1)\cdot\frac{b}{n})\\
&= \frac{b}{n}(0)^2+\frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2+\frac{b}{n}(2\cdot\frac{b}{n})^2+\frac{b}{n}(3\cdot\frac{b}{n})^2+\ldots+\frac{b}{n}((n-1)\cdot\frac{b}{n})^2\\
&= \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Remarque : on a toujours $s_n < A < S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{b^3(2n^3+3n^2+n)}{6n^3} = b^3\frac{2}{6} = \frac{b^3}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{b^3(2n^3-3n^2+n)}{6n^3} = b^3\frac{2}{6} = \frac{b^3}{3}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire $\frac{b^3}{3} \leqslant A \leqslant \frac{b^3}{3}$, donc $A = \frac{b^3}{3}$

On dit que f **est intégrable** sur [0;3] (au sens de Riemann)
et on note $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}$ ou $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ et soit $0\leq a\leq b$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x= a$ et $x=b$.

On considère donc maintenant l'intervalle [$a;b$].

En utilisant les résultats précédents, on voit que : $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ et soit $a\leq b\leq 0$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x= a$ et $x=b$.

Par symétrie de la fonction, on a dans ce cas : $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} x^2\,\mathrm{d}x$ où $0\leq -b\leq -a$

En utilisant les résultats précédents, on a que :

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{-a} x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^{-b} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{(-a)^3}{3}-\frac{(-b)^3}{3} = -\frac{a^3}{3} - -\frac{b^3}{3} = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ et soit $a\leq 0\leq b$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x= a$ et $x=b$.

On a dans ce cas : $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_a^0 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^b x^2\,\mathrm{d}x$ et on peut utiliser les cas précédents :

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_a^0 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{0^3}{3}-\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}-\frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

CONCLUSION : $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$ pour tous les choix possibles de $a\leq b$