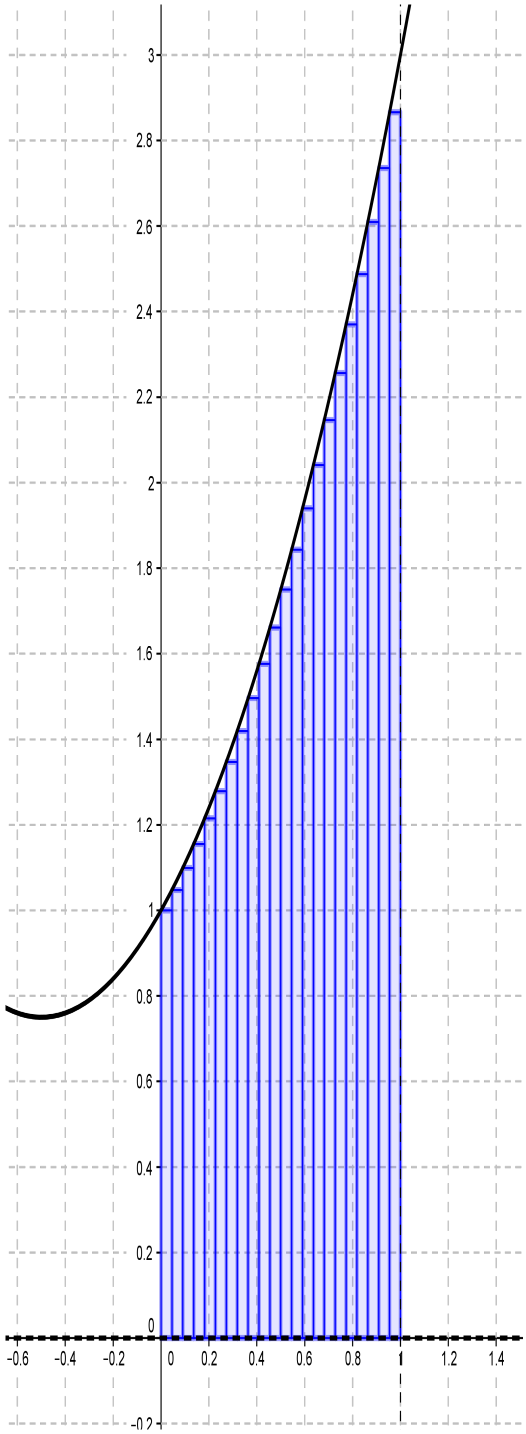
Ex 1 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+x+1$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=0$ et $x=1$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.
2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :

   $x_0=0\,;\ x_1=1\cdot\frac{1}{n}\,;\ x_2=\ldots\,;\ \ldots\,;\ x_{n-1}=\ldots\,;x_n=\ldots$

3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :

   $$S_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(1+2+\ldots+n\right)$$
   $$+\frac{1}{n}\left(1+1+\ldots+1\right)$$

   Indiquer clairement les étapes des calculs.

   Remarque : on peut aussi écrire S_n avec des notations $\sum_{\ldots=..}^{\ldots}\ldots$

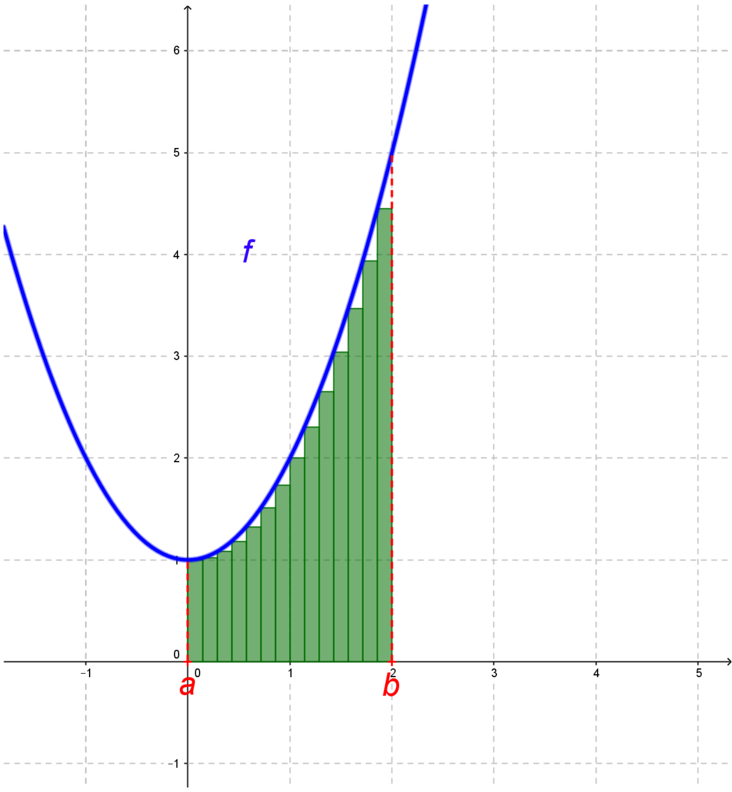
4. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces trois sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .
5. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la petite somme s_n donnerait le même résultat.

6. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat= $\frac{11}{6}$

Ex 2 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+1$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=0$ et $x=2$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.
2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :

   $$x_0=0\,;\ x_1=1\cdot\frac{2}{n}\,;\ x_2=\ldots\,;\ \ldots;\ x_{n-1}=\ldots\,;x_n=\ldots$$

3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :

   $$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+\frac{2}{n}\left(1+1+\ldots+1\right)$$

   Indiquer clairement les étapes des calculs.

   Indication : dans la 1re somme, on peut utiliser une mise en évidence :

   $$(2\cdot1)^2+(2\cdot2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2=2^2\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

   Remarque : on peut aussi écrire S_n *avec des notations* $\sum_{\ldots=\ldots}^{\ldots}\ldots$

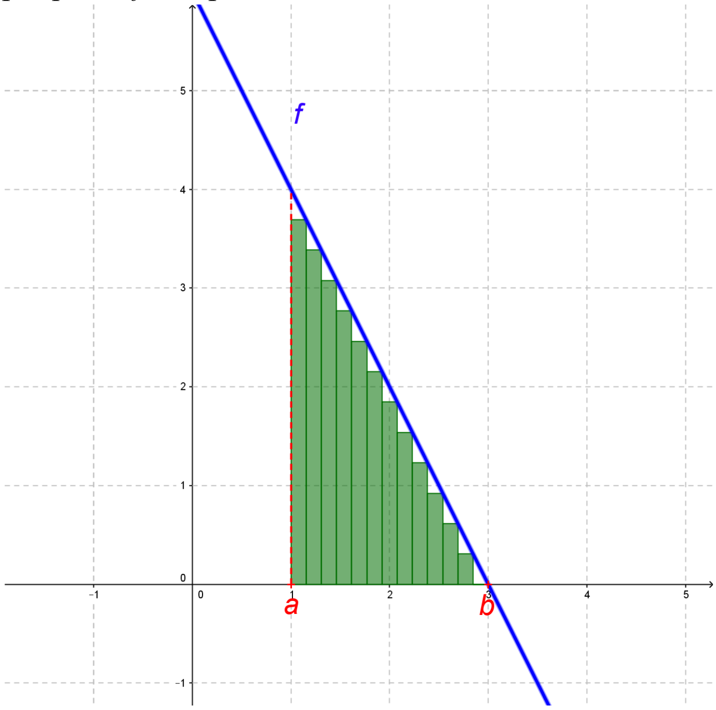
4. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces deux sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .
5. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la petite somme s_n donnerait le même résultat.

6. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat$=\frac{14}{3}$

Ex 3 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=-2x+6$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=1$ et $x=3$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.
2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :
   $x_0=1\,;\; x_1=1+1\cdot\frac{2}{n}\,;\; x_2=\ldots\,;\;\ldots\,;\; x_{n-1}=\ldots\,;\; x_n=\ldots$
3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :
   $$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{-4}{n}(1+2+\ldots+n)+\frac{2}{n}\cdot(-2)(1+1+\ldots+1)+\frac{2}{n}(6+6+\ldots+6)$$
   Indiquer clairement les étapes des calculs.

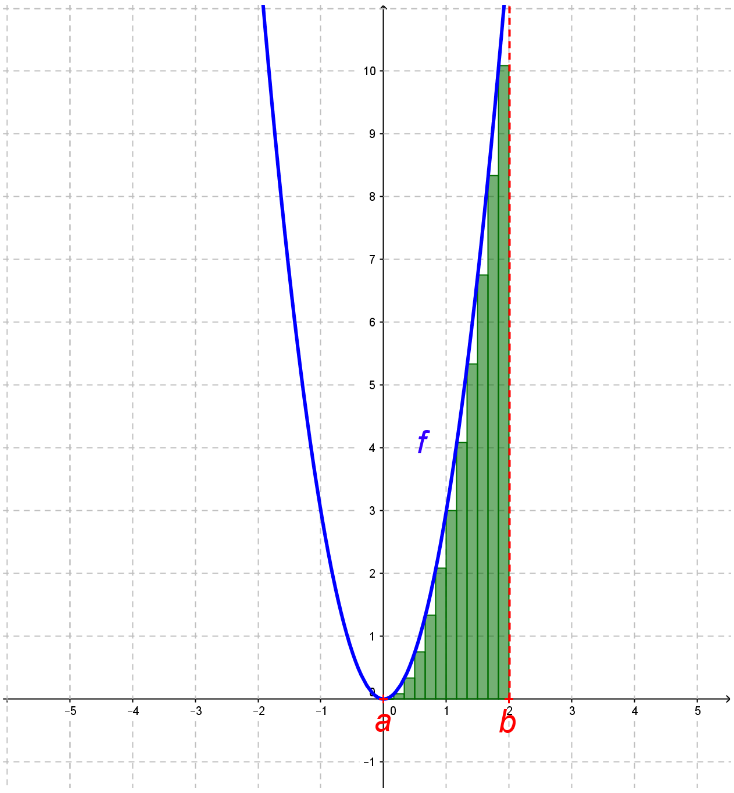
   Remarque : on peut aussi écrire S_n *avec des notations* $\sum_{\ldots=\ldots}^{\ldots}\ldots$
4. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces trois sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .
5. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la grande somme S_n donnerait le même résultat.

6. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat= 4
7. Montrer qu'un calcul direct de cette aire donne bien le même résultat !

Ex 4 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=3x^2$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=0$ et $x=2$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.

2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :

   $x_0=0\,;\ x_1=1\cdot\dfrac{2}{n}\,;\ x_2=\ldots;$
   $\ldots;\ x_{n-1}=\ldots;\ x_n=\ldots$

3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :

   $$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot 3\cdot 2^2\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

   Indiquer clairement les étapes des calculs.

   Indication : dans la 1re somme, on peut utiliser une mise en évidence :
   $(2\cdot 1)^2+(2\cdot 2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2=2^2\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$

   Remarque : on peut aussi écrire S_n *avec des notations* $\sum\limits_{\ldots=\ldots}^{\ldots}\ldots$

4. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces trois sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .

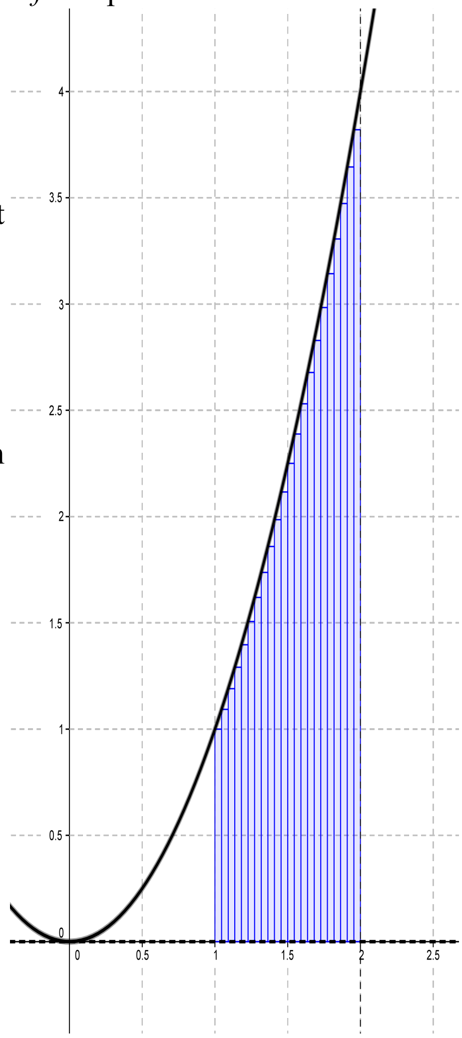
5. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la petite somme s_n donnerait le même résultat.

6. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat= 8

Ex 5 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^2$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=1$ et $x=2$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.
2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :

   $x_0=1\,;\; x_1=1+1\cdot\frac{1}{n}\,;\; x_2=\ldots\,;\ldots\,;\; x_{n-1}=\ldots\,;\, x_n=\ldots$
3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :

   $$S_n=\frac{2}{n}(1+2+\ldots+n)+\frac{1}{n}\cdot(1+1+\ldots+1)$$
   $$+\frac{1}{n^2}\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2)$$

   Indiquer clairement les étapes des calculs.

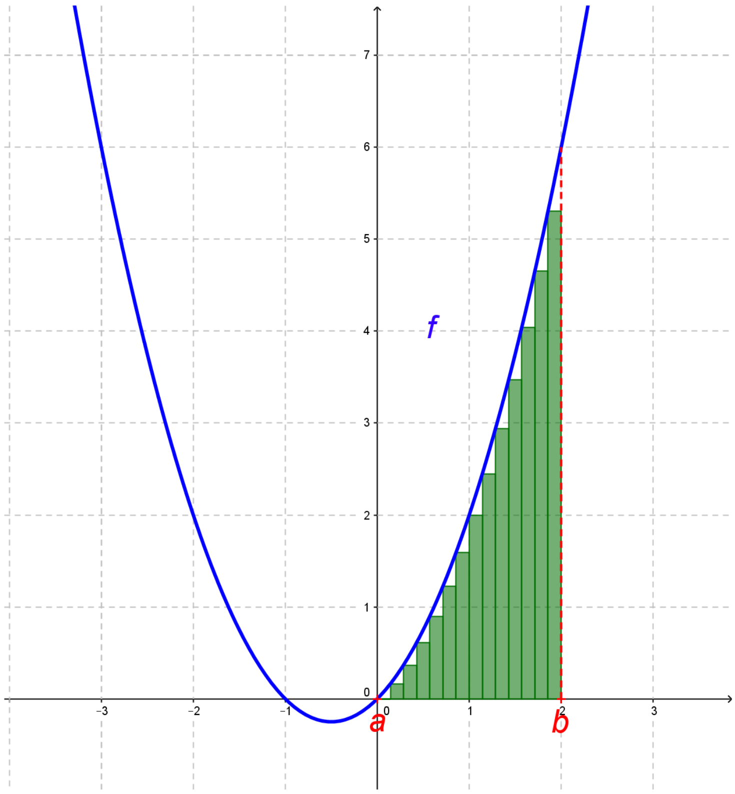
   Remarque : on peut aussi écrire S_n avec des notations $\sum_{\ldots=..}^{\ldots}\ldots$
4. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces trois sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .
5. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la petite somme s_n donnerait le même résultat.

6. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat= $\frac{7}{3}$

Ex 6 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+x$ représentée ci-dessous et on s'intéresse à l'aire exacte sous la représentation graphique de *f* comprise entre $x=0$ et $x=2$.



1. Considérer un découpage en *n* sous-intervalles équidistants de l'intervalle considéré sur l'axe des abscisses et déterminer la longueur Δx de ces sous-intervalles.
2. Déterminer les expressions algébriques de chaque point de découpe :

   $x_0=0\,;\ x_1=1\cdot\frac{2}{n}\,;\ x_2=\ldots\,;\ \ldots\,;\ x_{n-1}=\ldots\,;x_n=\ldots$

3. Pour donner une approximation de l'aire sous la représentation graphique de *f*, montrer qu'on peut exprimer la grande somme de Riemann S_n en fonction de *n* de la façon suivante :

   $$S_n=\frac{2}{n}\cdot\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+\frac{2}{n}\left(1+2+\ldots+n\right)$$

   Indiquer clairement les étapes des calculs.

   Indication : dans la 1re somme, on peut utiliser une mise en évidence : $(2\cdot1)^2+(2\cdot2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2=2^2\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$

4. *Remarque : on peut aussi écrire* S_n *avec des notations* $\sum_{\ldots=..}^{\ldots}\ldots$
5. Utiliser les formules de la table CRM (p.15) – voir aussi au tableau - pour simplifier l'écriture de chacune de ces trois sommes, et donc globalement de la grande somme de Riemann S_n .
6. Calculer la limite quand *n* tend vers l'infini de la grande somme de Riemann. Indiquer toutes les étapes de calcul.

On admet qu'un calcul similaire pour la petite somme s_n donnerait le même résultat.

7. En déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en utilisant une notation appropriée.

   Résultat= $\frac{14}{3}$