Act. 9, ex. 1 : $5\frac{1}{2}$ Cécile, Giulia (Hélin) (Mickael)

1. On partage $[0;1]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x = \frac{1}{n}$

2. On pose :

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{n}$$
$$x_2 = 0 + 2 \cdot \Delta x = 2 \cdot \frac{1}{n}$$
$$\dots$$
$$x_{n-1} = 0 + (n-1) \cdot \frac{1}{n} = (n-1) \cdot \frac{1}{n}$$
$$x_n = 0 + n \cdot (n-1) = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

3. $S_n = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \Delta x f(x_3) + \dots + \Delta x f(x_n)$ Vu

Rectangle 1 : $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$
Rectangle 2 : $\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$
R_3 : $\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$
R_{n-1} : $\frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$
R_n : $\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$

Somme : $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

donner les détails !

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

$$\cancel{\Leftrightarrow} = \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} + 1$$

5.

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} + 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} + \frac{n+1}{2n} + 1\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{2+3+6}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$$ Vu

Act 9 ex 1 (suite) :

Cécile, Giulia, Hélin, Michael

6.

$f(x) = x^2 + x + 1$

dérivée : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

$F(1) - F(0)$

$F(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$

---

l'intégrale : $I = \int_a^b f(x)\, dx$

$I = \int_0^1 f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{11}{6}$

sera vu plus tard...

ex 2

Alicia, Beverley, Margaux, Marguerite

6

1. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ (n = nbr de sous-intervalles)

2. $x_0 = 0 \cdot \frac{2}{n} = 0$; $x_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$; $x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$; $\dots$; $x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{2}{n}$; $x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$

$$A_1 = \Delta x \cdot f(x_1) = \frac{2}{n} \cdot \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right]$$
$$A_2 = \Delta x \cdot f(x_2) = \frac{2}{n} \cdot \left[\left(\frac{4}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1}) + \Delta x \cdot f(x_n)$$

m.e.e de Δx

$$S_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$S_n = \frac{2}{n} \left[\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \dots + \left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$S_n = \frac{2}{n} \left[\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2\right] + \frac{2}{n}[1 + 1 + \dots + 1 + 1]$$

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} \left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2\right) + \frac{2}{n}(1 + 1 + \dots + 1 + 1)$$

donc : $\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$

3. formule CRM : $(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc : $\frac{2^3}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{2}{n} \cdot n$

4. $\lim_{n \to \infty} = \frac{2^3}{\infty^3} \left(\frac{\infty(\infty+1)(2\infty+1)}{6}\right) + \frac{2}{\infty} \cdot \frac{\infty}{1}$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} = -\infty \cdot \infty + (-\infty) \cdot \infty \frac{2}{1}$

$= -\infty - \infty$

$= -\infty$

5. $\frac{2^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{2}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n} \longleftarrow (4.)$

$\cancel{\Leftrightarrow} = \frac{2^3}{\cancel{n^3}}\left(\frac{\cancel{n^3}(2+n^{-1}+2n^{-2})}{6}\right) + 2$

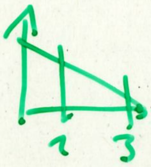
$\lim_{n \to \infty} 2^3\left(\frac{2+0+0}{6}\right) + 2$

$\cancel{\Leftrightarrow} = \lim_{n \to \infty} 2^3 + \frac{2}{6} + 2 \;\cancel{\Leftrightarrow} = \frac{14}{6}$

Alexcis, Amélie, Jawad, Jessica — Travail de groupe

5

Exercice 3



(1) $\Delta x = \frac{2}{n}$

(2) $x_0 = 1 + \frac{2}{n}$; $x_1 = 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}$; $x_3 = 1 + 3 \cdot \frac{2}{n}$; .... ; $x_n = 1 + \cancel{n} \cdot \frac{2}{\cancel{n}} = 2$

(3) $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$

$\cancel{S_n}$ s_n $= \frac{2}{n} \cdot \left(-2\left(1 + \frac{2}{n}\right) + 6\right) + \frac{2}{n} \cdot \left(-2 \cdot \left(2 + \frac{2}{n}\right) + 6\right) + \dots + \frac{2}{n} \cdot \left(-2 \cdot \left(n + \frac{2}{n}\right) + 6\right)$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{-4}{n}(1 + 2 + \dots + n) + \frac{2}{n} \cdot (-2)(1 + 1 + 1 \dots + 1) + \frac{2}{n}(6 + 6 + \dots + 6)$

(4) $-2n + \frac{12}{n} + \frac{-8n(n+1)}{2}$ $\left(-\frac{8}{n^2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) - \frac{4n}{n} + \frac{2}{n} \cdot 6n\right)$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} -2 \cdot (\infty) + \frac{12}{\infty} + \frac{-8 \cdot (\infty) \cdot (\infty + 1)}{2} = -\infty + 0 - \infty$

$\Rightarrow$ indetermination

On est censé trouver un nombre positif, car c'est 1 Aire, notre résultat est donc incorrect.

cf disc. en cours

+..

(6)

(7) $s_n \leq A \leq S_n$

Léa, Thalya, Maël, (Lara)

6

Ch 1. Act 9

Ex 4

1. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

2. $x_0 = 0$

$x_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$

$x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$

...

$x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{2}{n}$

$x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$

3. $S_n = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \dots + \Delta x\, f(x_n)$

$= \frac{2}{n} f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{2}{n} f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right)$

$= \frac{2}{n} \cdot 3\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot 3\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{2}{n} \cdot 3\left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2$

$= \frac{2}{n} \cdot 3\left(\frac{2}{n}\right)^2 \left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right)$

$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot 3 \cdot 2^2 \left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

4. $S_n = 3\left(\frac{2}{n}\right)^3 \left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right)$

$= 3\left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{24}{n^3} \, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{24n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{24n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$= \text{"} \frac{24\infty(\infty+1)(2\infty+1)}{6\infty^3} \text{"}$

$= \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(24n^2 + 24)(2n+1)}{6n^3}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{48n^3 + 24n^2 + 48n + 24}{6n^3}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3(48 + 24/n + 48/n^2 + 24/n^3)}{n^3 \cdot 6}$

$= \frac{48}{6} = 8$ ✓

6.

$\Rightarrow$ donc $s_n \leq A \leq S_n$

$\Leftrightarrow 8 \leq A \leq 8$

$\Leftrightarrow A = 8$

Groupe n°6 : Activité 9, exercice 6 : Alexia, Hugo, Kevin, Elodie

5

$\frac{1}{7}$. $\Delta x = \frac{2}{n}$

$\frac{2}{7}$. $x_0 = 0$

$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{2}{n}$

$x_2 = 0 + 2\Delta x = 4/n$

$x_3 = 0 + 3\Delta x = 6/n$

...

$x_{n-1} = 0 + (n-1)\cdot\Delta x = (n-1)\cdot\frac{2}{n}$

$x_n = 0 + \Delta x = \cancel{n}\cdot\frac{2}{\cancel{n}} = 2$

$\frac{3}{7}$. $S_n = \Delta x\cdot f(x_1) + \Delta x\cdot f(x_2) + \Delta x\cdot f(x_3) + \ldots + \Delta x\cdot f(x_n)$

$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}^2 + \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n}\cdot\left(\left(2\cdot\left(\frac{2}{n}^2 + \frac{2}{n}\right)\right) + \frac{2}{n}\cdot\left(\left(3\cdot\left(\frac{2}{n}^2 + \frac{2}{n}\right)\right) + \ldots + \frac{2}{n}\cdot\left(\left(n\left(\frac{2}{n}^2 + \frac{2}{n}\right)\right)\right)\right.\right.$

$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) + \frac{2}{n}\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right)$

$\frac{4}{7}$. $\cancel{\sum_{i=0}^{n} \frac{2}{n}\cdot f\left(\frac{2^2}{n} + \frac{2}{n}\right)}$

$\frac{5}{7}$. $\frac{2^3}{n^3}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right) + \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\frac{6}{7}$. $\lim_{n\to+\infty} S_n = $ " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$\rightarrow$ mise en évidence forcée

4...

Jonathan, Melvin, Léa, Léna

6

Ex: 5

1. $\Delta x = \frac{1}{n}$

2. $x_0 = 1 \; ; \; x_1 = 1 + \frac{1}{n} \; ; \; x_2 = 1 + \frac{2}{n} \; ; \; \ldots \; ; \; x_{n-1} = 1 + (n-1)\frac{1}{n} \; ; \; x_n = 1 + n\frac{1}{n}$

3. $$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_{n-1}) + \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$= \frac{1}{n} f\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(1+\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} f\left(1+(n-1)\cdot\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(1+n\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(1+(n-1)\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(1+n\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(1^2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\left(1^2+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\left(1^2+\frac{6}{n}+\frac{9}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(1^2+\frac{2(n-1)}{n}+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1^2+\frac{2n}{n}+\frac{n^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2}(1+2+3+\ldots+n) + \frac{1}{n}(1+1+1+\ldots+1) + \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

4. $$\frac{2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{1}{n} \cdot n + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n^2+n}{2} + 1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n^2+n}{n^2} + 1 + \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

5. $$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

$$= 1 + 4/3 = \frac{7}{3}$$