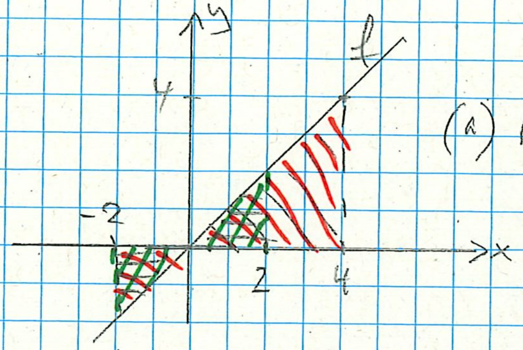
MA4N Ch1 Intégration Corrigé des exercices

ex1

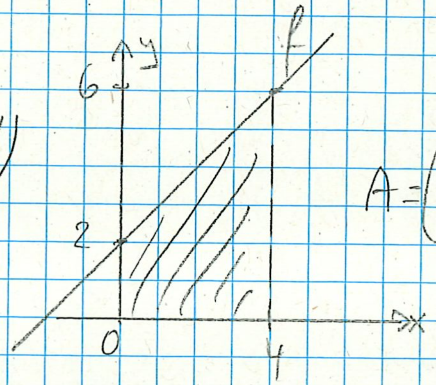


(a) $A = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

(b) $A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$

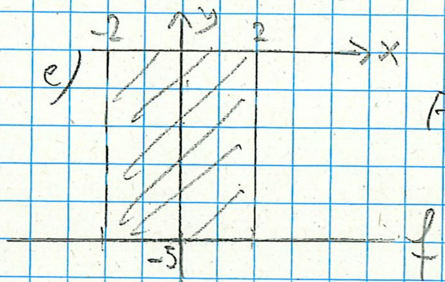
(c) $A = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 10$

d)



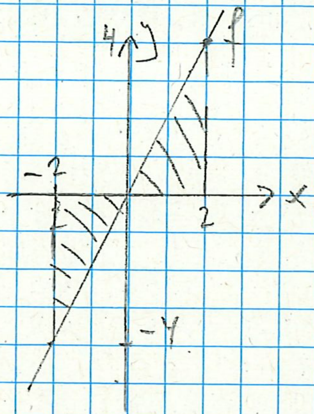
$A = \left(\frac{6+2}{2}\right) \cdot 4 = 16$ (trapèze)

e)



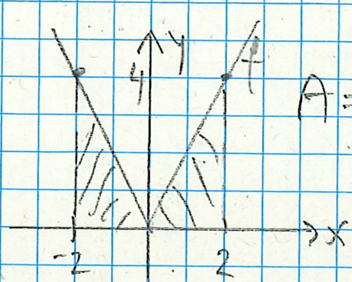
$A = 4 \cdot 5 = 20$ (rectangle)

f)



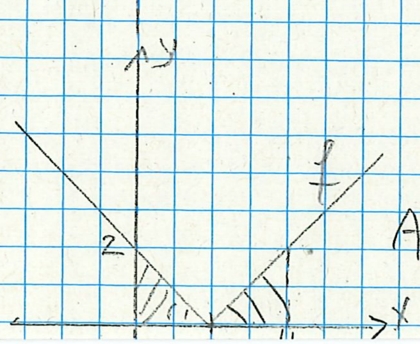
$A = \left(\frac{2 \cdot 4}{2}\right) \cdot 2 = 8$

g)



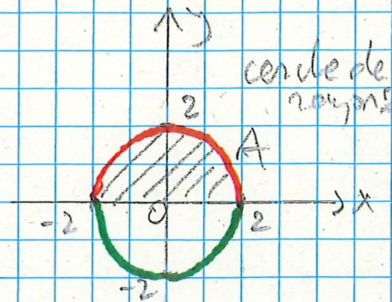
$A = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4}{2}\right) = 8$

h)



$A = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{2}\right) = 4$

i)



cercle de rayon 2 et de centre (0;0)

$y = \pm\sqrt{4-x^2} \iff y^2 = 4-x^2$

$\iff x^2+y^2=4$

A correspond à l'aire sous la courbe rouge $y=\sqrt{4-x^2}$

$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi$

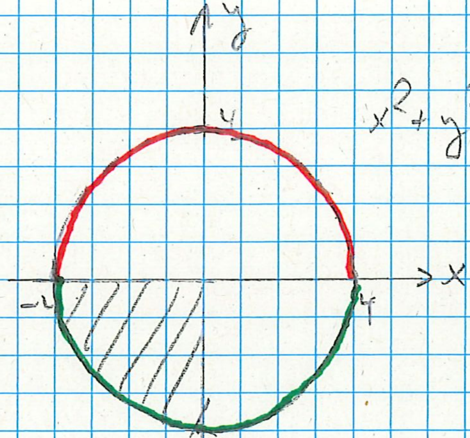
La fonction définie par $y=+\sqrt{4-x^2}$ est représentée graphiquement par la courbe rouge ;

— — — — — — — $y=-\sqrt{4-x^2}$

— — — — — — — — — — —

— — — verte.

j)

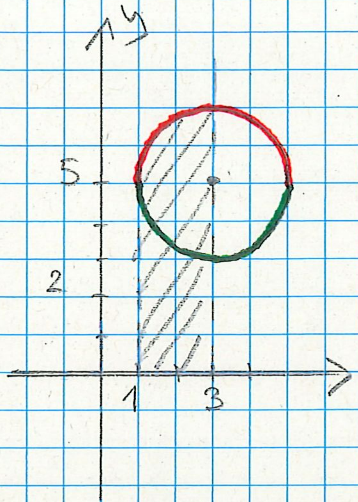


$x^2+y^2=16$ éq. du cercle de rayon 4 et de centre (0;0)

$y=\pm\sqrt{16-x^2}$

$A = \frac{1}{4}\pi\cdot 4^2 = 4\pi$

k)



$y=\pm\sqrt{4-(x-3)^2}+5 \iff y-5=\pm\sqrt{4-(x-3)^2}$

$\iff (y-5)^2 = 4-(x-3)^2$

$\iff (x-3)^2+(y-5)^2 = 4 = 2^2$

éq. du cercle de centre (3;5) et de rayon 2

⚠ on cherche l'aire sous la courbe rouge :

$A = \underbrace{\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2}_{\frac{1}{4}\text{ de cercle}} + \underbrace{2\cdot 5}_{\text{rectangle}} = \pi+10$

ex 2

a) $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$

d) $\sum_{i=0}^{6} (-1)^{i} i = 0-1+2-3+4-5+6$

b) $\sum_{i=7}^{12} i = 7+8+9+10+11+12$

e) $\sum_{i=1}^{7} (-1)^{i+1} (2i) = 2-4+6-8+10-12+14$

c) $\sum_{i=4}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{10}$

f) $\sum_{i=3}^{8} i^2 = 9+16+25+36+49+64$

ex 3

a) $\sum_{i=1}^{100} i$

c) $\sum_{i=6}^{500} 2i$

e) $\sum_{i=1}^{13} (-1)^{i} i^2$

b) $\sum_{i=7}^{999999} i$

d) $\sum_{i=0}^{24} (2i+1)$ ou $\sum_{i=1}^{25} (2i-1)$

f) $\sum_{i=1}^{21} (-1)^{i+1} \cdot 3i$

ex 4

a) $\sum_{i=0}^{6} f(x_i) = f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_6)$

b) $\sum_{i=11}^{16} f_i(x) = f_{11}(x)+f_{12}(x)+f_{13}(x)+\dots+f_{16}(x)$

c) $\sum_{i=1}^{5} i f(x_i) = f(x_1)+2f(x_2)+3f(x_3)+4f(x_4)+5f(x_5)$

ex 5

a) $\sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} \cdot i \cdot a_i$

b) $\sum_{i=1}^{3} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

ex 6 (TI30XPro)

a) MATH → 5: Sum → 1 ▷ 100 ▷ 2 x^{yzt}_{abcd} → Enter : 10100

b) MATH → 5: Sum → 32 ▷ 100 ▷ 2 x + 1 Enter : 9177

Ch 1 Ma 4

Ex 7

(a)

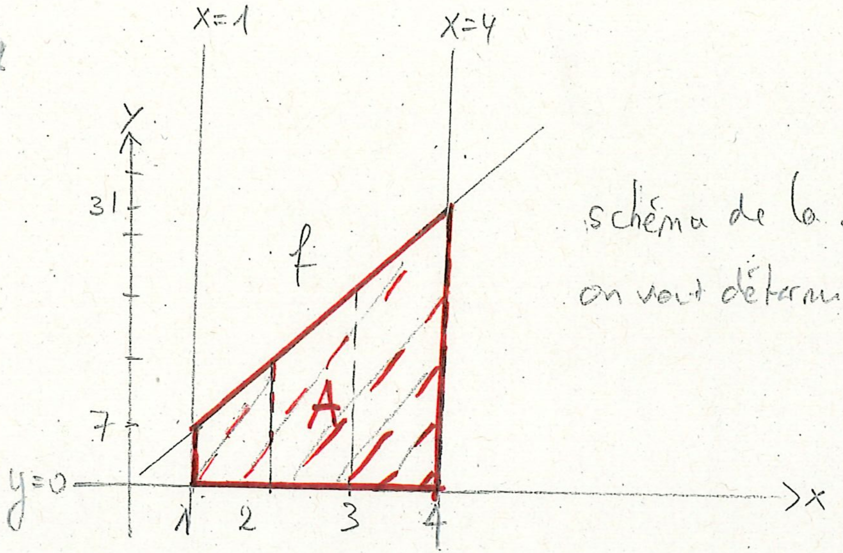


schéma de la situation :

on veut déterminer l'aire **A**

1°/ on découpe l'intervalle $[1 ; 4]$ en 4 intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

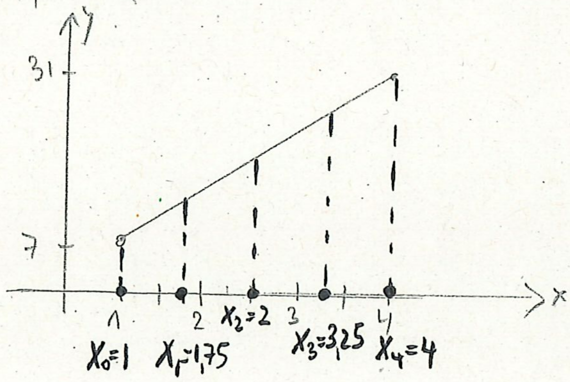
$x_0 = 1$

$x_1 = 1 + \Delta x = 1,75$

$x_2 = 1 + 2 \cdot \Delta x = 2,5$

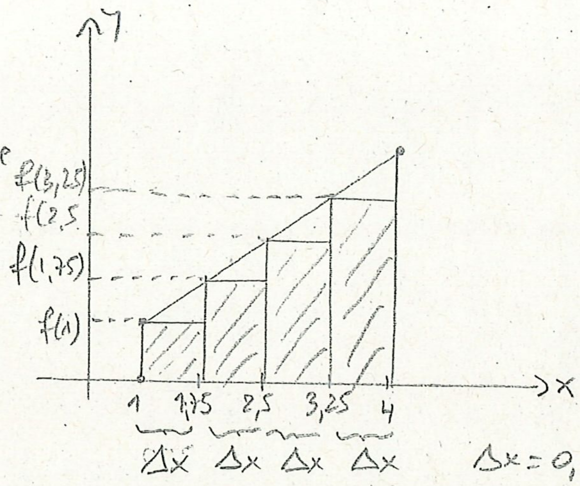
$x_3 = 1 + 3 \cdot \Delta x = 3,25$

$x_4 = 1 + 4 \cdot \Delta x = 4$



2°/ petites sommes :

on choisit des rectangles de telle sorte que la somme de leurs aires soit inférieure à l'aire cherchée



$\Delta x = 0,75$

la somme de leurs aire vaut :

$$0,75 \cdot f(1) + 0,75 \cdot f(1,75) + 0,75 \cdot f(2,5) + 0,75\, f(3,25)$$

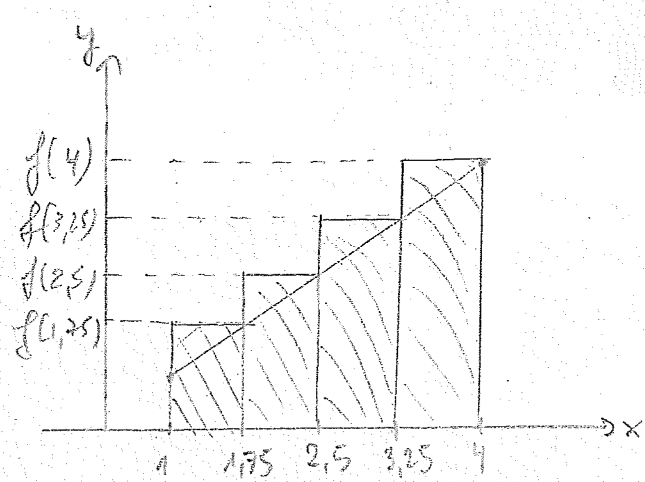
$$= 0,75\left(f(1) + f(1,75) + f(2,5) + f(3,25) \right)$$

$$= 0,75\left[(8 \cdot 1 - 1) + (8 \cdot 1,75 - 1) + (8 \cdot 2,5 - 1) + (8 \cdot 3,25 - 1) \right]$$

$$= \dots = 48$$

grandes sommes:

on choisit des rectangles de telle sorte que la somme de leurs aires soit supérieure à l'aire cherchée



la somme de leurs aires vaut:

$$0{,}75 \cdot f(1{,}75) + 0{,}75\, f(2{,}5) + 0{,}75 \cdot f(3{,}25) + 0{,}75\, f(4)$$
$$= 0{,}75 \cdot \left(f(1{,}75) + f(2{,}5) + f(3{,}25) + f(4) \right)$$
$$= 0{,}75 \cdot \left[(8 \cdot 1{,}75 - 1) + (8 \cdot 2{,}5 - 1) + (8 \cdot 3{,}25 - 1) + (8 \cdot 4 - 1) \right]$$
$$= \dots = 66$$

On en déduit une approximation de A par valeurs inférieure et supérieure: $48 \leq A \leq 66$

Remarque: dans ce cas très particulier, on peut déterminer géométriquement A via l'aire du trapèze:

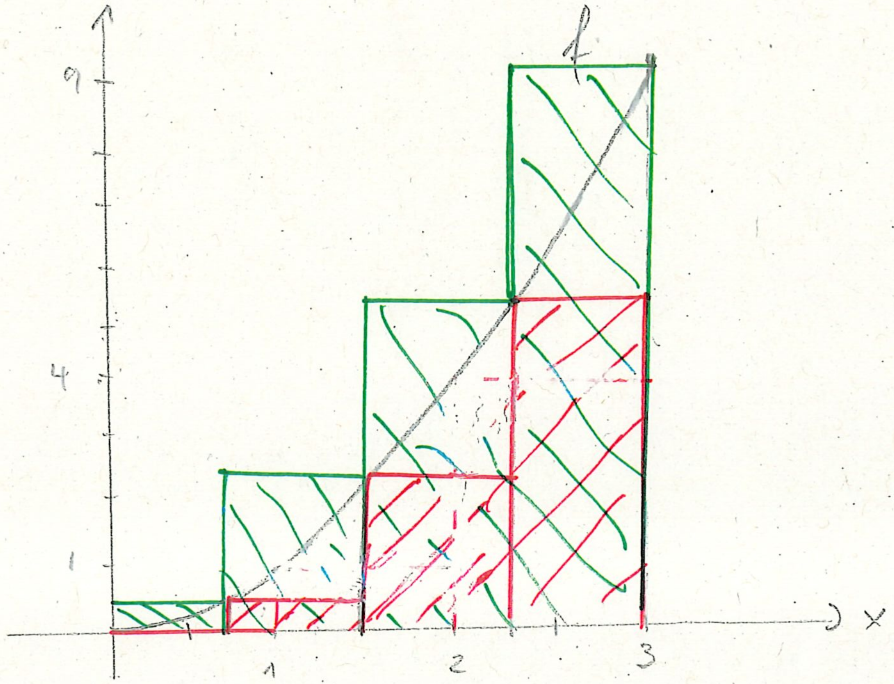
$$A = \left(\frac{31+7}{2} \right) \cdot 3 = 19 \cdot 3 = 57$$

On a bien $48 \leq 57 \leq 66$!

Ch 1

Ex 7

(b)



on découpe $[0;3]$ en 4 parties égales : $\Delta x = \frac{3-0}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$x_0 = 0$
$x_1 = 0 + \Delta x = 0{,}75$
$x_2 = 0 + 2\Delta x = 1{,}5$
$x_3 = 0 + 3\Delta x = 2{,}25$
$x_4 = 0 + 4\Delta x = 3$

petites sommes $s_4 = 0{,}75 \cdot f(0) + 0{,}75\, f(0{,}75) + 0{,}75\, f(1{,}5) + 0{,}75\, f(2{,}25)$
$= 0{,}75 \cdot [0^2 + 0{,}75^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2] = \ldots \cong 5{,}9$

grandes sommes $S_4 = 0{,}75\, f(0{,}75) + 0{,}75 \cdot f(1{,}5) + 0{,}75\, f(2{,}25) + 0{,}75\, f(3)$
$= 0{,}75 \cdot [0{,}75^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2 + 3^2] = \ldots \cong 12{,}7$

On en déduit une approximation de l'aire cherchée par valeurs inférieure et supérieure :

$5{,}9 \leq A \leq 12{,}7$

Ch 1

Ex 8

Partage en 8 sous-intervalles égaux :

$\Delta x = \frac{3}{8}$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0 + 1\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$; $x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$; ... ; $x_8 = 0 + 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$

petites sommes $s_8 = \Delta x f(x_0) + \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_7)$

$= \Delta x \left[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_7) \right]$

$= \frac{3}{8} \left[0^2 + \left(1 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + \dots + \left(7 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 \right]$

$= \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2 \right] \cong 7{,}4$

avec la calculatrice, il faut calculer $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \sum_{i=0}^{7} i^2$

$(\to 3 \to \frac{\square}{\square} \to 8 \triangleright) \to x^{\square} \to 3 \triangleright \times \to$

math $\to 5 \to 0 \triangleright 7 \triangleright x^{y+t}_{abcd} \; x^2 \to$ Enter

résultat : $\frac{345}{128}$ $\triangleleft\triangleright \approx 7{,}38$

grandes sommes : idem pour obtenir en décalant

$S_8 = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left[1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 \right] \cong 10{,}8$

d'où $7{,}38 \leq A \leq 10{,}8$

(ii) partage en 16 sous-intervalles :

$\Delta x = \frac{3}{16}$

$x_0 = 0$; $x_1 = 1 \cdot \frac{3}{16}$; $x_2 = 2 \cdot \frac{3}{16}$; $x_3 = 3 \cdot \frac{3}{16}$; ... ; $x_{16} = 16 \cdot \frac{3}{16} = 3$

petites sommes $s_{16} = \dots = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left[0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 15^2 \right] \cong 8{,}2$

grandes sommes $S_{16} = \dots = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 16^2 \right] \cong 9{,}9$