Corrigé

a) Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$.

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites *x*=0 et *x*=1:

On partage $[0;1]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

On pose : $x_0=0$, $x_1=0+\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_2=0+2\Delta x=\frac{2}{n}$, … ,

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=\frac{n-1}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=\frac{n}{n}=1$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}
$$

on utlilise la formule donnée : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On obtient alors:

$$S_n=\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

d'où : $$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})\\
&= \frac{1}{n}(0)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(0^2+1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}=\frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

et donc: $s_n = \frac{1}{n^4}\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)=\frac{1}{n^4}\frac{(n-1)^2 n^2}{4}=\frac{(n-1)^2}{4n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n+1}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n\leqslant A\leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{1}{4}\leqslant A\leqslant\frac{1}{4}$, donc $A=\frac{1}{4}$ ou $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

b) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$.

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites x=0 et x=3.

On considère donc maintenant l'intervalle [0;3].

On partage [0;3].en n intervalles équidistants de longueur $\frac{3-0}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{3}{n}$

On pose : $x_0=0$,, $x_1=\Delta x=\frac{3}{n}$, $x_2=2\Delta x=2\cdot\frac{3}{n}$, $x_3=3\Delta x=3\cdot\frac{3}{n}$,...,

$x_{n-1}=(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{3}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{3}{n}=3$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f(n\cdot\frac{3}{n})\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^3+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^3+\ldots+\frac{3}{n}(n\cdot\frac{3}{n})^3\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{81}{n^4}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{81n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{81(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{81(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{81(n^2+2n+1)}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{81n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{81(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4} = \frac{81}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0) + \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \ldots + \Delta x\, f(x_{n-1}) \\
&= \frac{3}{n} f(0) + \frac{3}{n} f(\frac{3}{n}) + \frac{3}{n} f(2\cdot\frac{3}{n}) + \frac{3}{n} f(3\cdot\frac{3}{n}) + \ldots + \frac{3}{n} f((n-1)\cdot\frac{3}{n}) \\
&= \frac{3}{n}(0)^3 + \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3 + \frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^3 + \frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^3 + \ldots + \frac{3}{n}((n-1)\cdot\frac{3}{n})^3 \\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^3 \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3\right) \\
&= \frac{81}{n^4}\left(0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3\right) \\
&= \frac{81(n-1)^2 n^2}{4n^4} = \frac{81(n-1)^2}{4n^2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{81(n-1)^2}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{81(n^2-2n+1)}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{81n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{81(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4} = \frac{81}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{81}{4} \leqslant A \leqslant \frac{81}{4}$, donc $A = \frac{81}{4}$ ou $\int_0^3 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{81}{4}$

c) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $b>0$

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=0$ et $x=b$.

On considère donc maintenant l'intervalle $[0;b]$.

On partage $[0;b]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{b}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{b}{n}$

On pose : $x_0=0$, $x_1=0+\Delta x=\frac{b}{n}$, $x_2=0+2\Delta x=2\cdot\frac{b}{n}$,...,

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{b}{n}$, $x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{b}{n}=b$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)\\
&= \frac{b}{n}f\left(\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)+\ldots+\frac{b}{n}f\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\ldots+\frac{b}{n}\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^3\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)\\
&= \frac{b^4}{n^4}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors:

$$S_n=\frac{b^4}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)=\frac{b^4n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}$$

d'où : $$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4(n^2+2n+1)}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{4}=\frac{b^4}{4}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\ldots+\Delta x\, f(x_{n-1})\\
&= \frac{b}{n}f(0)+\frac{b}{n}f\left(\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)+\ldots+\frac{b}{n}f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\\
&= \frac{b}{n}(0)^3+\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\frac{b}{n}\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^3+\ldots+\frac{b}{n}\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^3\\
&= \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^3\left(0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{b^4}{n^4}\left(0^3+1^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)$$

On obtient alors:

$$s_n = \frac{b^4(n-1)^2 n^2}{4n^4} = \frac{b^4(n-1)^2}{4n^2}$$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4(n-1)^2}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4(n^2-2n+1)}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^4 n^2(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot 4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{4} = \frac{b^4}{4}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{b^4}{4} \leqslant A \leqslant \frac{b^4}{4}$, donc $A=\frac{b^4}{4}$ ou $\int_0^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4}{4}$

d) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $0\leq \mathrm{a}\leq \mathrm{b}$

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites *x*= *a* et *x*=*b*.

En utilisant les résultats précédents, on a que : $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^3\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$

e) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $\mathrm{a}\leq \mathrm{b}\leq 0$

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites *x*= *a* et *x*=*b*.

Par symétrie de la fonction, on a dans ce cas : $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} x^3\,\mathrm{d}x$ où $0\leq -\mathrm{b}\leq -\mathrm{a}$

En utilisant les résultats précédents, on a que :

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} x^3\,\mathrm{d}x = -\left(\int_0^{-a} x^3\,\mathrm{d}x - \int_0^{-b} x^3\,\mathrm{d}x\right) = -\left(\frac{(-a)^4}{4}-\frac{(-b)^4}{4}\right) = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$$

f)Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3$ et soit $\mathrm{a}\leq 0\leq \mathrm{b}$

On cherche l'aire *A* sous la courbe de *f* délimitée par l'axe 0*x* et les droites *x*= *a* et *x*=*b*.

On a dans ce cas : $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \int_a^0 x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^b x^3\,\mathrm{d}x$ et on peut utiliser les cas précédents :

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \int_a^0 x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{0^4}{4}-\frac{a^4}{4}+\frac{b^4}{4}-\frac{0^4}{4} = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$$

CONCLUSION : $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$ pour tous les choix possibles de $\mathrm{a}\leq \mathrm{b}$