Corrigé

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

On cherche l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites x=0 et x=3.

On considère donc maintenant l'intervalle [0;3].

On partage $[0;3]$ en n intervalles équidistants de longueur $\frac{3}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{3}{n}$

On pose : $x_0=0$

$$x_1=0+\Delta x=\frac{3}{n}$$

$$x_2=0+2\Delta x=2\cdot\frac{3}{n}$$

$$x_3=0+3\Delta x=3\cdot\frac{3}{n}$$

...

$$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=(n-1)\cdot\frac{3}{n}$$

$$x_n=0+n\Delta x=n\cdot\frac{3}{n}=3$$

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\Delta x f(x_3)+\ldots+\Delta x f(x_n)\\
&= \frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f(n\cdot\frac{3}{n})\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{3}{n}(n\cdot\frac{3}{n})^2\\
&= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{27}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\\
&= \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles**:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x f(x_0)+\Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\ldots+\Delta x f(x_{n-1})\\
&= \frac{3}{n}f(0)+\frac{3}{n}f(\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(2\cdot\frac{3}{n})+\frac{3}{n}f(3\cdot\frac{3}{n})+\ldots+\frac{3}{n}f((n-1)\cdot\frac{3}{n})
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{n}(0)^2+\frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(2\cdot\frac{3}{n})^2+\frac{3}{n}(3\cdot\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{3}{n}((n-1)\cdot\frac{3}{n})^2$$

$$= \frac{3}{n}(\frac{3}{n})^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{27}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{27}{n^3}\frac{(n-1)n(2\mathrm{n}-1)}{6}$$

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{27\mathrm{n}(n+1)(2\mathrm{n}+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{27(2\mathrm{n}^3+3\mathrm{n}^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{27(n-1)n(2\mathrm{n}-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{27(2\mathrm{n}^3-3\mathrm{n}^2+n)}{6n^3} = \frac{2\cdot 27}{6} = 9$$

$\lim_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire $9 \leqslant A \leqslant 9$, donc $\mathrm{A}=9$

On dit que ***f* est intégrable** sur [0;3] (au sens de Riemann)
et on note $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$ ou $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$