Trouver une primitive – étape 1+

Donnée

Une fonction réelle f définie par $f(x)$=... sur un intervalle $[a;b]$

Rappel

Si f est continue, on sait qu'une primitive F existe — par thm fond I

(et même une infinité de primitives $G = F$ + cte)

Objectif

Déterminer une expression algébrique pour $F(x)$

Pourquoi?

Calculer (plus) facilement des intégrales — par thm fond II

Solution

1. On vérifie s'il s'agit d'une primitive élémentaire

Ex: $$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C$$

si non

2. Peut-on utiliser les propriétés de l'intégrale, en particulier « sortir » les constantes multiplicatives du calcul et/ou décomposer en sommes/diff ?

Ex: $$\int (3x^2-2)\,\mathrm{d}x=3\int x^2\,\mathrm{d}x-\int 2\,\mathrm{d}x=3\frac{x^3}{3}-2x+C=x^3-2x+C$$

si non

3. Peux-on récrire $f(\mathrm{x})$ pour simplifier le calcul?

Ex: $$\int \frac{x^3+2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x+2\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}+C$$

si non

4. Peut-on utiliser la composition?

$$\int g'(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x))+C$$

ou $$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x))+C$$

Ex: $\int 3x^4(x^5-2)^7\,\mathrm{d}x$ [le pivot: x^5-2]

$$=\int \frac{3}{5}[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{5}\int [(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{(x^5-2)^8}{8}+C$$

si non

5. Méthodes avancées

Intégration par parties

Ex: $$\int x\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin(x)-\int 1\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\sin(x)-(-\cos(x))+C = x\cdot\sin(x)+\cos(x)+C$$

Intégration par substitution ou changement de variable

Ex: $$I=\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$ on pose : $x+1=t \Leftrightarrow t=x-1$

$dx=dt$

$x=0 \Leftrightarrow t=1$ et $x=2 \Leftrightarrow t=3$

$$I=\int_0^3 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x=\int_0^3 \sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x=\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\ldots\frac{4}{3}$$

Ex: $$F(x)=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$ on pose : $x=\sin(t) \Leftrightarrow t=\arcsin(x)$

$dx=\cos(t)\,dt$

$$F(x)=\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t=\int \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|}\cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{car...}}{=} \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int 1\cos()\,\mathrm{d}t=t+C=\arcsin(x)+C$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Ex: $$F(x)=\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan(x)+C$$

Si non : on pourrait continuer ; il existe d'autres méthodes ...

Remarque : de très nombreuses fonctions admettent une primitive sans qu'on puisse obtenir une expression algébrique explicite $F(x)$ ...