Ln/exp: les théorèmes à connaître

Théorème : Si $x>0$ et $y>0$, alors $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Démonstration

Soit α un nombre réel strictement positif.

On a : $[F(\alpha x)]'=F'(\alpha x)\cdot(\alpha x)'$, car [ARG Thm 3e «dérivée de la composition » (non démontré)]

$=\frac{1}{\alpha x}\cdot(\alpha x)'$, car [ARG propriété de *F* (via thm fondamental)]

$=\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha$, car [ARG dérivée $(\alpha x)'$ (via déf de la dérivée)]

$=\frac{1}{x}$, car [ARG simplification (ok car α non nul]

$=F'(x)$, car [ARG propriété de *F* (via thm fondamental)]

Donc $(F(\alpha x))'-(F(x))'=0$, car [ARG $-(F(x))'$]

$\left(F(\alpha x)-F(x)\right)'=0$, car [ARG Thm 3e « Dérivée de la différence »]

ce qui implique que $F(\alpha x)-F(x)=c$ où *c* est une constante réelle, car [ARG Thm 3e Cor AF]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser *x* = 1, car [ARG la constante est la même pour toute valeur de *x* du domaine de définition]

$F(\alpha 1)-F(1)=c$, d'où $c=F(\alpha)$, car [ARG *F*(1)=0, propriété de *F*]

On obtient donc finalement la propriété : $F(\alpha x)=F(x)+F(\alpha)$, car [ARG substitution]

Comme ceci est vrai pour tout *x* et tout α strictement positifs, on peut aussi écrire $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Théorème : Si $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors $F(x^\alpha)=\alpha\cdot F(x)$

Démonstration

Soit α un nombre réel strictement positif.

On a : $[\alpha F(x)]'=\alpha F'(x)$, car [ARG Thm 3e « Dérivée de αf »]

mais aussi: $[F(x^\alpha)]'=\frac{1}{x^\alpha}(x^\alpha)'$, car [ARG Thm 3e «dérivée de la composition » (non démontré)]

$=\frac{1}{x^\alpha}(\alpha x^{\alpha-1})$, car [ARG 3e dérivée x^n]

$=\alpha\frac{1}{x^\alpha}x^{\alpha-1}$, car [ARG algèbre (associativité de la multiplication]

$=\alpha\frac{1}{x}$, car [ARG simplification [ok car *x* non nul]]

$=\alpha F'(x)$, car [ARG propriété de *F* (via thm fondamental)]

d'où: $(F(x^\alpha))'-\alpha F'(x)=0$, car [ARG $-\alpha F'(x)$]

$(F(x^\alpha))'-(\alpha F(x))'=0$, car [ARG Thm 3e « Dérivée de αf]

$\left(F(x^\alpha)-\alpha F(x)\right)'=0$, car [ARG Thm 3e « Dérivée de la différence »]

ce qui implique que $(F(x^\alpha)-\alpha F(x))'=C$ où C est une constante réelle, car [ARG Thm 3e Cor AF]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser x = 1, car [ARG la constante est la même pour toute valeur de x du domaine de définition]
$F(1)-\alpha F(1)=C$, d'où $C=0$, car [ARG F(1)=0, propriété de F]
On obtient donc finalement la propriété : $F(x^{\alpha})=\alpha\cdot F(x)$, car [ARG substitution+ $+\alpha\cdot F(x)$]

Théorème : Si $x\in\mathbb{Q}$, alors $ln^{-1}(x)=e^{x}$

La réciproque du logarithme naturel, ln^{-1}, est une fonction telle que
$\ln(\ln^{-1}(x)) = x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, car [ARG déf réciproque]
$\ln^{-1}(\ln(x)) = x$ pour tout $x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, car [ARG déf réciproque]
Donc pour tout x strictement positif et tout nombre $\alpha\in\mathbb{Q}$, on a:
$x^{\alpha} = \ln^{-1}(\ln(x^{\alpha}))$
$= ln^{-1}(\alpha \ln(x))$, car [ARG propriété ln démontrée plus haut]
Posons $x = e$: $e^{\alpha} = \ln^{-1}(\alpha\cdot\ln(e)) = \ln^{-1}(\alpha)$, car [ARG ln($e$)=1, déf de e]
Nous avons donc montré que la réciproque du logarithme naturel est une fonction définie par $\ln^{-1}(x) = e^{x}$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$.
En fait, on peut démontrer que $\ln^{-1}(x) = e^{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Théorème : Si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, alors $e^{x+y}=e^{x}\cdot e^{y}$

Poser $e^{x} = X$ et $e^{y} = Y$, càd $\ln(X) = x$ et $\ln(Y) = y$.
On a: $e^{x+y} = e^{ln(X)+ln(Y)}$, car [ARG substitution]
$= e^{ln(XY)}$, car [ARG propriété ln démontrée plus haut]
$= XY$, car [ARG exp et ln réciproques]
$= e^{x}e^{y}$ car [ARG substitution]

Théorème : Si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, alors $e^{xy}=\left(e^{x}\right)^{y}$

Poser $e^{x} = X$, càd $\ln(X) = x$
On a: $e^{\alpha x} = e^{\alpha ln(X)}$ car [ARG substitution]
$= e^{ln(X^{\alpha})}$ car [ARG propriété ln démontrée plus haut]
$= X^{\alpha}$ car [ARG exp et ln réciproques]
$= (e^{x})^{\alpha}$ car [ARG substitution]

Théorème : Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\left(e^x\right)' = e^x$

L'exponentielle est la réciproque d'une fonction dérivable, donc elle-même dérivable, car [ARG thm de 3e « Dérivée de la réciproque » (non démontré)]

Sa dérivée s'obtient en dérivant les deux termes de la relation $\ln(e^x) = x$:

on obtient $\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1$, car [ARG Thm 3e «dérivée de la composition » (non démontré)]

d'où $(e^x)' = (e^x)$, car [ARG multiplication par (e^x) , ok car $(e^x) \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$]