Trouver une primitive

Donnée

Une fonction réelle f définie par $f(x)$=... sur un intervalle $[a;b]$

Rappel

Si f est continue, on sait qu'une primitive F existe — par thm fond I

(et même une infinité de primitives G = F + cte)

Objectif

Déterminer une expression algébrique pour $F(x)$

Pourquoi?

Calculer (plus) facilement des intégrales — par thm fond II

Solution

1. On vérifie s'il s'agit d'une primitive élémentaire

Ex: $$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C$$

si non

2. Peut-on utiliser les propriétés de l'intégrale, en particulier « sortir » les constantes multiplicatives du calcul et/ou décomposer en sommes/diff ?

Ex: $$\int (3x^2-2)\,\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x - \int 2\,\mathrm{d}x = 3\frac{x^3}{3} - 2x + C = x^3 - 2x + C$$

si non

3. Peux-on récrire $f(x)$ pour simplifier le calcul?

Ex: $$\int \frac{x^3+2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + C$$

si non

4. Peut-on utiliser la composition?

$$\int g'(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C$$

ou $$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + C$$

Ex: $\int 3x^4(x^5-2)^7\,\mathrm{d}x$ [le pivot: x^5-2]

$$= \int \frac{3}{5}[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{5}\int [(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{(x^5-2)^8}{8} + C$$

si non

5. Peut-on utiliser ln/exp?

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \quad \text{et} \quad \int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$$

Ex: $$\int \frac{3x^4}{x^5-2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int \frac{5x^4}{x^5-2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\ln|x^5-2| + C$$

Ex: $$\int \frac{3x}{e^{2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int 3x\,e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{-4}\int -4x\,e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}e^{-6x^2} + C$$

si non

Pourrait continuer ...

Remarque : de très nombreuses fonctions admettent une primitive sans qu'on puisse obtenir une expression algébrique explicite $F(x)$ ...