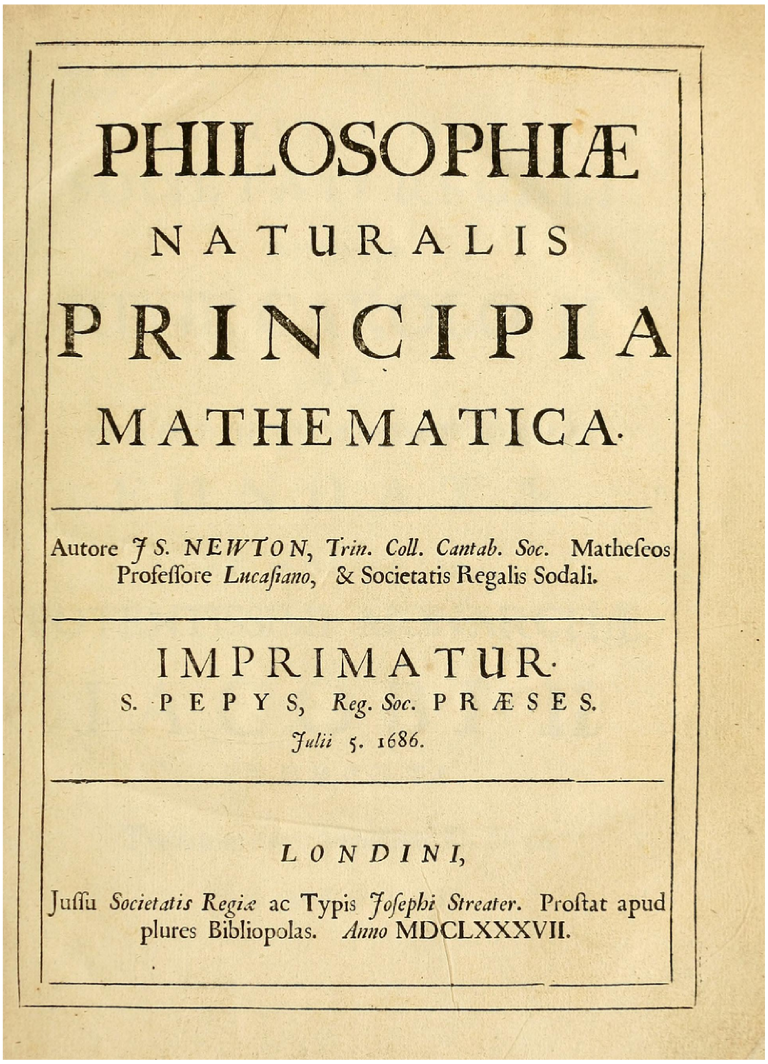
Chapitre 1 - Intégration



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

hilosophiae naturalis principia mathematica (latin pour Principes mathématiques de la philosophie naturelle) est l'œuvre maîtresse d'Isaac Newton, publiée à Londres en 1687

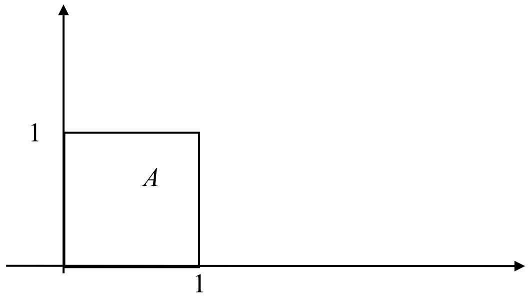
Problème

Colin additionne les cubes des chiffres du nombre 2016. Il obtient 225. Il recommence avec les chiffres du résultat et obtient 141, puis successivement 66, 432, 99, 1458, 702, 351, 153, 153 , ... Les nombres suivants sont alors tous égaux à 153.
Combien y a-t-il d'années au 21e siècle (entre 2001 et 2100 inclus) pour lesquelles ce procédé permet d'aboutir au nombre 153 ? Justifier la démarche ...

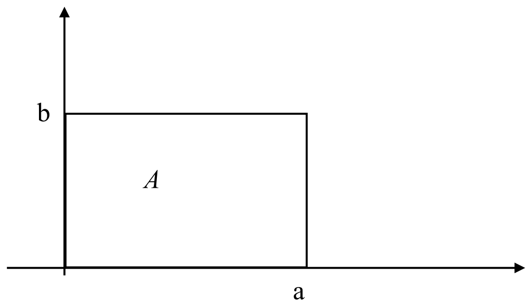
1 [Activité] Aires

Calculer les aires A des figures géométriques suivantes :

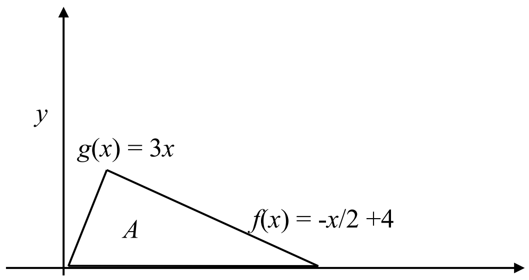
a.



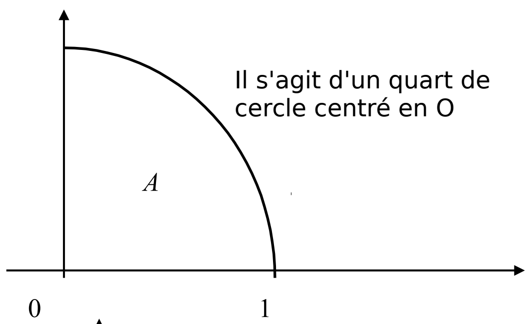
b.



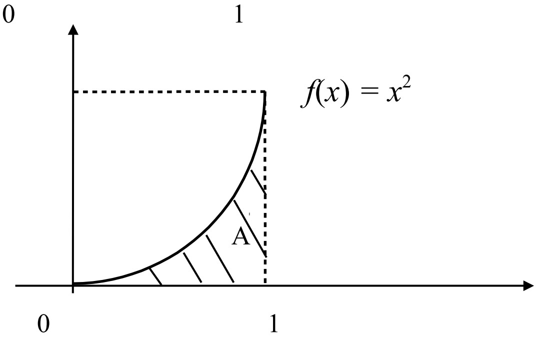
c.



d.



e.



2 [Activité] Sommes

1. Quel sens donner aux expressions suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{8} i^2$

b. $\sum_{i=1}^{n} i$

2. Même question pour :

a. $\sum_{i=k}^{n} 2i$

b. $\sum_{i=1}^{n} f(i)$, où f est définie par $f(x)=2x+1$

3. Donner d'autres exemples.

4. Attention : que dire de $\sum_{i=3}^{8} f(x^i)$?

3 [Activité] A l'envers

1. Ecrire à l'aide de cette notation en $\sum$ les sommes suivantes :

a. 1 + 2 + 3 + ... + 36

b. 8 + 9 + ... + 299

c. 13 + 15 + 17 + ... + 1001

d. la somme des multiples de 3 positifs inférieurs ou égaux à 50

e. $1-2+3-4+5-6+...+224$

f. $-5+10-15+20+...-1300$

4 [Activité] Avec la calculatrice

Calculer avec la calculatrice :

a. $\sum_{i=1}^{10} i^3$

b. $\sum_{i=18}^{41} i^3$

5 [Activité] Approximer

On considère la surface S délimitée par l'axe $0x$, les droites $x = 0$, $x = 1$ et la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

a. Représenter graphiquement S.

On s'intéresse à calculer l'aire A de S.

b. Expliquer pourquoi cela semble compliqué.

c. Partager l'intervalle $[a;b]$ en 4 segments **équidistants**.

d. Construire 4 « grands rectangles » dont la somme des aires soit supérieure à celle de A.

e. Construire 4 «petits rectangles » dont la somme des aires soit inférieure à celle de A.

f. Déduire des points précédents une approximation de A par encadrement.

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 8

6 [Activité] Calculs d'aires par sommes infinies

Reprenons la fonction $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et considérons maintenant un **partage** de $[0;1]$ en n segments équidistants.

a. Que se passe-t-il si n devient très grand ?

b. Utiliser un passage à la limite pour déterminer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=1$.

7 [Activité] Généralisation

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Soit $b > 0$ un réel. On cherche à calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=0$ et $x=b$.

a. Représenter graphiquement la situation.

b. Quel intervalle considérer ?

c. Expliciter un partage en n sous-intervalles équidistants.

d. Expliciter les **grandes sommes** et **petites sommes** de Riemann.

e. Déterminer A.

2. Considérons maintenant $0\leq a\leq b$ deux réels. Calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=a$ et $x=b$.

3. Et si $a\leq b\leq 0$? Et si $a\leq 0\leq b$?

8 [Activité] Intégrale de Riemann

1. Définir l'intégrale de Riemann en général.

2. Calculer $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x, \forall a\leq b$.

3. Calculer $\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \forall a\leq b$.

4. Quels sont les avantages et les inconvénients de cet outil ?

9 [Activité] Intégrale = aire ?

1. Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ainsi que l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x= a$ et $x=b$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=6$

2. Donner l'interprétation géométrique d'un calcul d'intégrale comme étudié jusque-là.

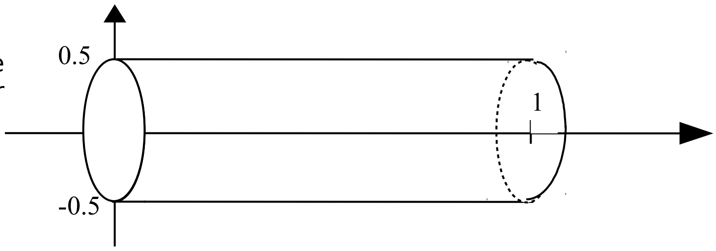
10 [Aller plus loin] Volume ?

En s'inspirant des calculs d'aires de surfaces par limite d'approximations par des rectangles, imaginer un moyen pour calculer le volume d'un cône droit de rayon 4 et de hauteur 8, puis effectuer ce calcul.

11 [Aller plus loin] Valable ?

On propose le procédé suivant pour le calcul du volume du cylindre de hauteur 1 et de rayon 0,5.

On commence par coucher le cylindre :



puis on découpe l'intervalle [0;1] en n parties de longueur $\frac{1}{n}$, ce qui permet d'obtenir n petits cylindres dont on peut calculer le volume : il vaut $\frac{1}{n}\pi(0.5)^2$

on fait enfin tendre n vers l'infini pour obtenir $V=\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\pi(0.5)^2=\pi(0.5)^2$;

on retrouve bien le résultat obtenu en appliquant la formule du volume du cylindre donne.

Que penser de ce raisonnement ?

12 [Activité] Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Comment se représenter le concept d'intégrale de façon judicieuse ?

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Tout calcul de dérivée en un point est un calcul de limite du type "indétermination $\frac{0}{0}$ "

b. Tout calcul d'intégrale est un calcul de limite du type "indétermination $0\cdot\infty$ "

c. Calculer une intégrale (de surface) et une aire c'est la même chose.

d. L'outil intégrale sert exclusivement à essayer de mesurer une surface.

13 [Activité] Toujours intégrable ?

1. La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse ?

Conjecture : Toutes les fonctions sont intégrables sur un intervalle [*a*;*b*] donné.

2. Soit la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-\sqrt{2})^2}\text{, si } x\neq\sqrt{2}\\ 0\text{, sinon}\end{cases}$ et [*a*;*b*] = [0;2].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

3. Soit $f(x)=\begin{cases}1\text{, si } x\in\mathbb{Q}\\0\text{, sinon}\end{cases}$ et $[a;b]$ = [0;1].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

4. Que conclure quant à la conjecture énoncée en 1. ?

5. Soit $f(x)=\begin{cases}1\text{, si } x\in[0;1[\\0\text{, si } x=1\end{cases}$ et $[a;b]$ = [0;1].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?

6. Il existe une condition **suffisante mais non nécessaire** qui garantit l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle ; quelle est-elle ?

14 [Activité] Critère d'intégrabilité

Représenter à l'aide de diagramme de Venn les ensembles D, C et I des fonctions respectivement dérivables, continues et intégrables en identifiant les inclusions et en illustrant avec des exemples.

15 [Activité] Calculer des intégrales plus efficacement : étape 1

On considère la surface S délimitée par l'axe $0x$ et la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

a. Représenter S.

b. Poser le calcul d'intégrale qui permet de calculer son aire A.

c. Que penser de ce calcul ?

16 [Activité] Propriétés de l'intégrale

1. Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$. Nous avons défini $\int_a^b f(x)\,dx$ pour $a\leq b$. Quel sens donner à $\int_b^a f(x)\,dx$, par exemple à $\int_2^1 x^2\,dx$?

2. On donne ci-dessous le **Théorème « Propriétés des intégrales »**

a. Théorème : Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur [a;b]. Alors on a :

i $\int_a^b k\,dx=k\cdot(b-a), \forall k\in\mathbb{R}$

ii kf est intégrable sur [a;b] et on a $\int_a^b k\,f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$, $\forall\, k\in\mathbb{R}$

iii ($f+g$) est intégrable. sur [a;b] et on a $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

iv (f - g) est intégrable. sur [a;b] et on a $\int_a^b f(x)-g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

v $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Remarque : c'est aussi vrai si $a < b < c$ et f intégrable sur [a;c] !)

vi si $f(x)\geq 0, \forall\, x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

vii si $f(x)\leq 0, \forall\, x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

viii si $f(x)\geq g(x), \forall\, x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Illustrer ces propriétés.

b. * Démontrer les propriétés i. ii. iii. iv. vi et vii.

3. Rappel sur les intégrales de base : nous savons que, pour tout choix possible de a et b des nombres réels tels que $a < b$:

i $\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$: démontré par un calcul géométrique d'aire

ii $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$: démontré avec la définition de l'intégrale

iii $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$: démontrable avec la définition de l'intégrale

Résoudre l'exemple de l'activité précédente en s'aidant de ces propriétés et des intégrales de base connues. Que penser de cette méthode de calcul d'intégrale ?

Voir la théorie 4 à 6 et les exercices 9 à 17

17 [Activité] Calculer des intégrales plus efficacement : étape 2

On considère la notation $f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)$.

a. Illustrer avec des exemples.

b. Récrire $\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ et $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$ en utilisant cette notation.

c. Enoncer une conjecture de portée générale à partir de ces trois résultats.

18 [Activité] Théorèmes

1. Théorème de la moyenne

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Alors il existe au moins un $c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\cdot(b-a)$

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer ce théorème.

c. Pourquoi appelle-t-on ce théorème « théorème de la moyenne ».

2. Théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) : relation entre intégrale et dérivée.

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur [*a*;*b*] et $x_0\in[a;b]$. On définit une nouvelle fonction F définie par $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall x\in[a;b]$. Alors, on a:

i F est dérivable

ii $F'(x)=f(x),\ \forall x\in]a;b[$

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer ce théorème.

c. Pourquoi appelle-t-on ce théorème « théorème fondamental».

19 [Activité] Primitives

Considérons la définition suivante : F est une **primitive** de f sur I $\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$.

Chercher une primitive F d'une fonction f donnée, c'est donc se poser la question suivante: « de quelle fonction F la fonction f est-elle la dérivée?

1. Trouver une primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$. Y a-t-il plusieurs solutions ? Justifier.

2. Trouver une primitive F de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ telle que $F(1)=2$?

3. Trouver une primitive F de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ telle que $F(1)=2$ et $F(2)=1$.

4. Peut-on trouver une primitive de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ qui ne soit pas de la forme $F(x)=\frac{x^3}{3}+c$?

5. Interpréter graphiquement les résultats obtenus précédemment.

6. Enoncer une conjecture concernant toutes les primitives d'une fonction donnée.

7. Démontrer cette conjecture.

20 [Activité] LE théorème

Théorème fondamental II (du calcul différentiel et intégral) - (Théorème de Newton-Leibnitz)

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a, b \in I$ et G une primitive de f sur I.

Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer.

c. Quel est l'intérêt de ce théorème ?

21 [Activité] En résumé

1. Déterminer toutes les **intégrales indéfinies** suivantes : $\int x^3\,dx$, $\int x^4\,\mathrm{d}x$, $\int x^{45}\,\mathrm{d}x$, $\int x^n\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer une primitive de $f(x) = x^4 + 5x^3 - \frac{1}{2}x2 - 7$.

3. Déterminer toutes les primitives de $f(x) = x^4 + 5x^3 - \frac{1}{2}x2 - 7$.

4. Calculer les intégrales :

a. $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$

b. , $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$

c. , $\int_0^1 x^{45}\,\mathrm{d}x$

d. , $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

e. $\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$

f. $\int_0^1 (x^4 + 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 7)\,\mathrm{d}x$

22 [Activité] Déterminer une primitive

Déterminer une primitive pour les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x) = -3x + 7$

b. $f(x) = x^4 - 2x + 4$

c. $f(x) = (3x)^5$

d. $f(x) = (5x+2)^2$

e. $f(x) = (4-2x)^5$

f. $f(x) = 8x(4x^2+7)^5$

g. $f(x) = (3x^2-2)(x^3-2x+4)^6$

h. $f(x) = (6x^2-4)(x^3-2x+4)^6$

i. $f(x) = (2-3x^2)(x^3-2x+4)^6$

j. $f(x) = \frac{2}{x}$

k. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

l. $f(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^2}$

m. $f(x) = \frac{x^5 - 3}{x^4}$

n. $f(x) = \frac{3x^2}{(1+3x^3)^4}$

o. $f(x) = \frac{2x+1}{(2x^2+2x+6)^3}$

p. $f(x) = x^2\sqrt{x^5}$

q. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

r. $f(x) = \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

s. $f(x) = \cos(4x)$

t. $f(x) = 1+\tan^2(4x)$

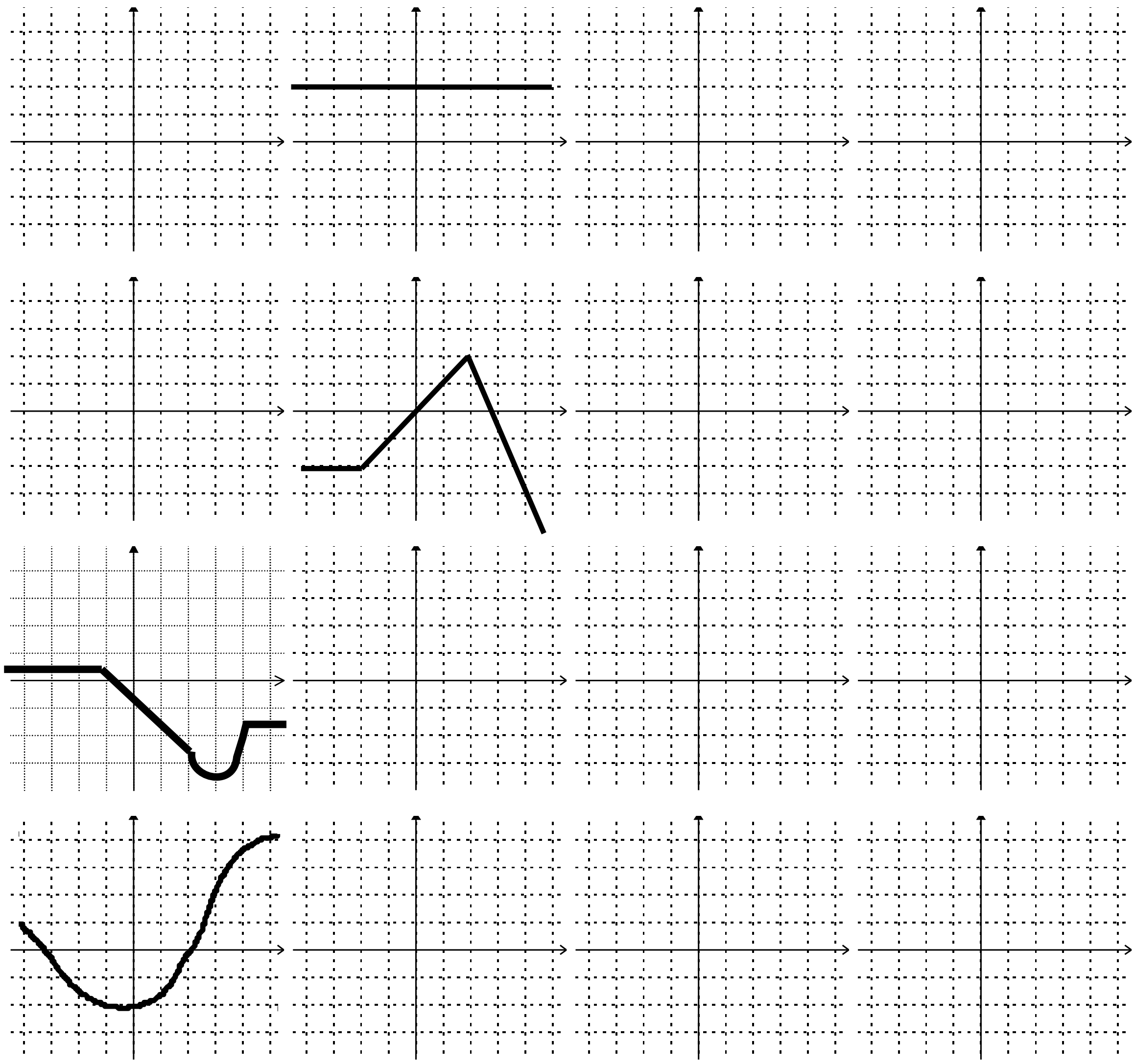
u. $f(x) = 2\sin(x)\cos^5(x)$

v. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{(2\sin(x)-1)^2}$

23 [Activité] Graphiquement

Esquisser les graphes qui manquent (les deux derniers cas sont plus difficiles):

f	f'	$\int_1^x f(t)\,dt$	$\int_{-2}^x f(t)\,dt$



Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 18 à 22

24 [Activité] Aires

1. Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{2x}$ et $g(x)=\frac{x^2}{16}$. On considère le domaine S compris entre les courbes représentatives des fonctions f et g.

a. Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de ces deux fonctions.

b. Calculer l'aire de S en donnant la réponse sous forme exacte simplifiée au maximum.

2. Considérons les représentations graphiques de deux fonctions continues f et g données et $A=(a;f(a))$ et $B=(b;f(b))$ deux points d'intersection. Déterminer une méthode générale pour calculer l'aire de la surface délimitée par ces deux courbes entre A et B.

25 [Activité] Volumes de révolution

1. Nous savons déjà que le calcul intégral permet de déterminer l'aire de surfaces à priori difficiles à mesurer. Pour autant que ces surfaces soient délimitées par des graphes de fonctions continues, nous savons aussi que les intégrales dont nous aurons besoin existent, et que nous sommes capables de les calculer dans les cas où nous pouvons déterminer les primitives nécessaires au calcul. Imaginer des situations dans lesquelles nous sommes dans l'impossibilité de déterminer l'aire d'une surface donnée.

2. Nous avons aussi vu un cas où le calcul intégral permet de déterminer un volume. Nous allons essayer de généraliser l'approche vue à cette occasion.

a. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle de centre O=(0;0) et de rayon 1 autour de la droite $y = 0$.

b. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle de centre O=(0;0) et de rayon r autour de la droite $y = 0$.

c. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation de la droite d'équation $y = 2x + 1$ autour de l'axe Ox.

d. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$.

e. Donner la définition d'un **corps de révolution** et d'un **volume de révolution**. Donner des exemples.

f. Déterminer une méthode générale pour calculer le volume de révolution déterminé par une courbe connue.

26 [Aller plus loin] Aire latérale du cône ?

En suivant une procédure analogue à celle de l'intégrale de Riemann pour le calcul d'une aire, nous allons calculer l'aire latérale du cône de base circulaire de rayon R et de hauteur H (sans l'aire de la base).

On le découpe en tranches élémentaires parallèles au plan de symétrie Oxy :

On découpe verticalement l'aire latérale en n tranches. L'aire latérale S d'une tranche de petite épaisseur z située à l'altitude z est celle du cylindre de rayon $r(z)$ correspondant : $S=2\cdot r(z)\cdot z$

L'aire latérale totale S est alors donnée par :

$$S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi R\frac{H-z}{H}\Delta z$$

ce qu'on note S = $S=\int_0^H 2\pi R\frac{H-z}{H}dz$

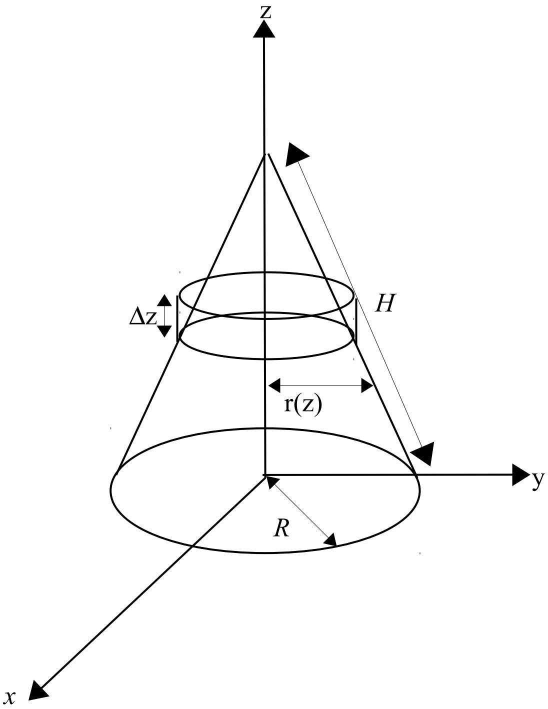
Si on calcule cette intégrale, on obtient :

$$S=2\pi\frac{R}{H}\int_0^H(H-z)dz=2\pi\frac{R}{H}\left(Hz-\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^H$$
$$=2\pi\frac{R}{H}\cdot\frac{1}{2}H^2=\pi R$$

Pourtant, dans la table numérique, il est écrit que l'aire latérale de ce cône est $S=\frac{1}{3}RG$,

où G est la longueur de la diagonale du cône.

Que se passe-t-il ?



27 [Aller plus loin] Longueurs

1. Utiliser le calcul intégral pour calculer le demi périmètre d'un cercle de rayon 1.

2. Utiliser le calcul intégral pour calculer le quart de périmètre d'un cercle de rayon R.

3. Enoncer une méthode générale.

4. Utiliser cette méthode dans le cas de :

a. une sphère de rayon 1

b. une sphère de rayon R

c. un cône de rayon R et de hauteur H

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 23 à 28

28 [Aller plus loin] Intégration par parties

1. Trouver une primitive de la fonction f déterminée par $f(x)=x\sin(x)$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\mathrm{dx}$

3. Enoncer une méthode générale pour déterminer ce type de primitive ou d'intégrale.

Voir la théorie 12 et les exercices 29 à 32

1 [Souvenirs] Aires

Définition « Surface et aire »

Une **surface** dans le plan est un objet géométrique : un sous-ensemble de dimension deux du plan.
Etant donné un repère normé du plan et donc une unité de mesure, on peut associer une **aire** à une surface, soit le nombre d'unité de mesure qui est nécessaire pour recouvrir exactement et sans chevauchement la surface. Une aire est un nombre réel positif ou nul.

Aires des surfaces de base

En acceptant l'aire du rectangle, on sait démontrer les formules pour les aires des triangles et des autres quadrilatères de base (carré, parallélogramme, losange, trapèze), des polygones par **triangulation** ainsi que des cercles (par un argument de limite).

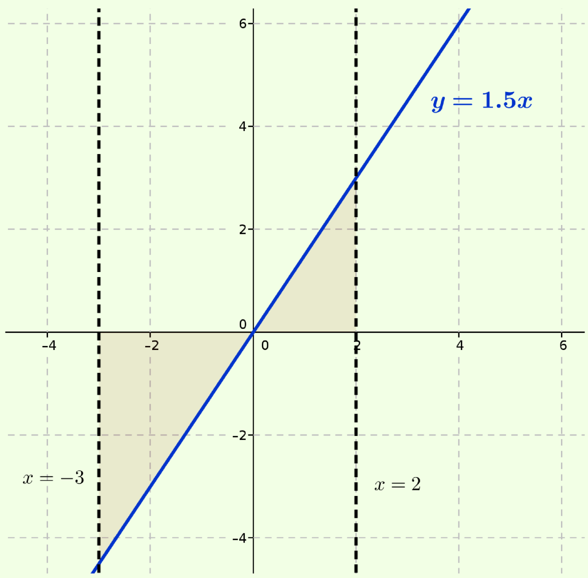
Méthode « Aires de surfaces délimitées par des courbes connues »

Par addition ou soustraction, on peut calculer les aires de surfaces « simple » en se ramenant à des calculs d'aires de surfaces de base.

Exemple : déterminer géométriquement la valeur de l'aire de la surface délimitée par l'axe $0x$, les droites x = -3 et x = 2 et la droite d'équation y = 1,5x.

Une fois la situation représentée, il est clair qu'il ne s'agit plus que de calculer l'aire de deux triangles en prenant soin de ne considérer que des valeurs positives :

$$A=\frac{2\cdot f(2)}{2}+\frac{3\cdot|f(-3)|}{2}$$
$$=\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4.5}{2}=3+6{,}75=9{,}75$$



2 [A savoir] Sommes

Définitions

$\sum_{i=1}^{n} f(i)$ est définie comme : $\sum_{i=1}^{n} f(i)=f(1)+f(2)+...+f(n)$
et se lit « somme pour l'indice i allant de 1 jusqu'à n de $f(i)$ ».

$\sum_{i=k}^{n} f(i)$, où i, n et k sont des nombres entiers ($k\leq n$). et $f(i)$ une expression mathématique faisant intervenir la variable i, est définie comme :

$$3-6+9-\ldots-63$$

et se lit « somme pour l'indice i allant de k jusqu'à n de $f(i)$ » et

Remarques

☐ le nom de la variable qui permet la somme n'est pas important :

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)=\sum_{j=1}^{n} f(j)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

☐ par contre, il faut faire attention : $\sum_{i=1}^{3} f(j)=f(j)+f(j)+f(j)$ car $f(j)$ est une constante par rapport à i !

Exemples : écrire comme somme la somme des entiers entre 21 et 456, la somme des multiples de 5 positifs inférieurs ou égaux à 100, les multiples de 5 supérieurs à 21 et inférieurs ou égaux à 100 et $-1+4-9+16+\ldots-169$

la somme des entiers entre 21 et 456 : $\sum_{i=21}^{456} i$

la somme des multiples de 5 positifs inférieurs ou égaux à 100 : $\sum_{i=0}^{20} 5i$

les multiples de 5 supérieurs à 21 et inférieurs ou égaux à 100 : $\sum_{i=5}^{20} 5i$

$$-1+4-9+16+\ldots-169=\sum_{i=1}^{20}(-1)^{i+1}\cdot i^2$$

Méthode « Somme avec la calculatrice »

Comment s'aider de la calculatrice pour calculer des sommes ?

Exemple : calculer $\sum_{i=1}^{15} i^2$

math → sum (ou taper sur « 5 ») puis saisir successivement 1 → flèche droite → 15 → x → x² → «Enter : réponse 1240

Rappel : le manuel utilisateur de la calculatrice :

3 [A savoir] Approximer

Méthode

Pour obtenir une approximation de l'aire de la surface comprise entre une courbe croissante ou décroissante connue f, l'axe Ox et deux droites verticales $x=a$ et $x=b$, on procède ainsi :

☐ choisir un entier n ;

☐ partager l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles équidistants, de longueur $\Delta x=\frac{1}{n}$;

☐ identifier les $n+1$ points du partage sur l'axe Ox, qu'on nomme x_0, x_1, x_2, …, x_n ;

☐ pour chaque sous-intervalles, construire le plus grand « petit rectangle » dont l'aire soit inférieure à celle sous la courbe dans ce sous-intervalle ; sa base est de longueur $\Delta x = \frac{1}{n}$ et sa hauteur est obtenue en calculant l'image de l'un des x_i ;

☐ la somme de ces aires donne une approximation par défaut de l'aire considérée ;

☐ on procède de même avec des petits « grands rectangles » pour obtenir une approximation par excès ;

☐ on a finalement un encadrement de l'aire cherchée.

Remarque : plus n est grand, plus l'encadrement est précis.

Exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Approximer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=1$ en partageant l'intervalle [0;1] en 4 segments équidistants.

On partage $[0;1]$ en 4 intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{4}$ et on note $\Delta x = \frac{1}{4}$

On pose :

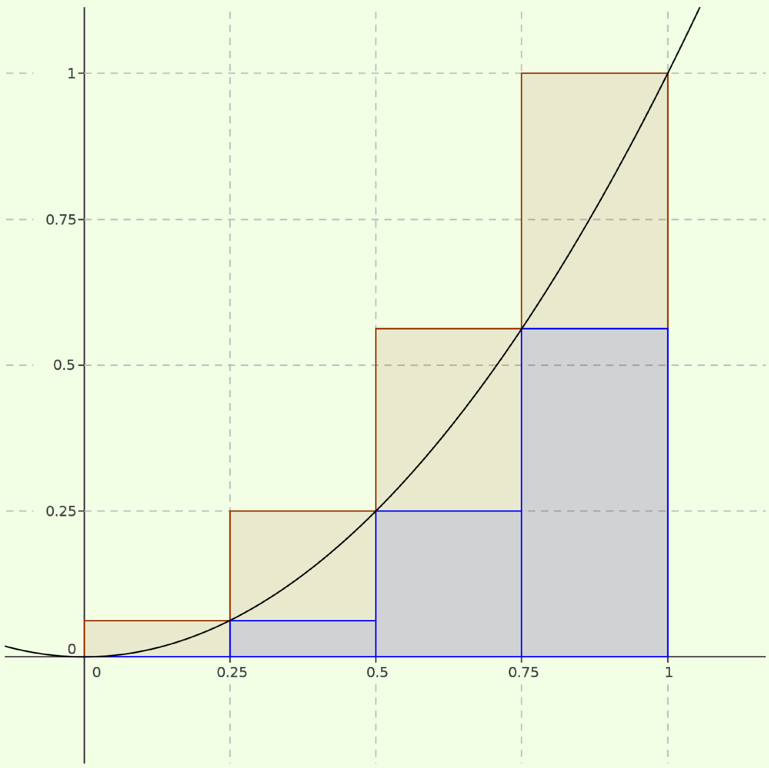
$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{2}{4}$

$x_3 = \frac{3}{4}$

$x_4 = \frac{4}{4} = 1$



On approxime par des petits (en bleu) et grands rectangles (en brun).

Les grandes sommes donnent :

$$S_n = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \Delta x\, f(x_3) + \Delta x\, f(x_4) \quad \left(= \sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot f(x_i) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{4}{4}\right) \quad \left(= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \cdot f(x_i) \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2 \quad \left(= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{4^2}{4^2}\right) \quad \left(=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i^2}{4^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\sum_{i=1}^{4}i^2\right)$$

$$= \frac{1}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4^3}\sum_{i=1}^{4}i^2\right)$$

$$= \frac{1}{64}(1+4+9+16)=\frac{1}{64}(30)=\frac{30}{64}=\frac{15}{32}$$

Puis les petites sommes :

$$s_n = \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\Delta x\cdot f(x_i)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{0}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot f(x_i)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{0}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i}{4}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{0^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3^2}{4^2}\right) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i^2}{4^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\left(0^2+1^2+2^2+3^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\sum_{i=0}^{3}i^2\right)$$

$$= \frac{1}{4^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4^3}\sum_{i=0}^{3}i^2\right)$$

$$= \frac{1}{64}(0+1+4+9)=\frac{1}{64}(14)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$$

On en déduit un encadrement de l'aire : $\frac{7}{32}\leqslant A\leqslant\frac{15}{32}$

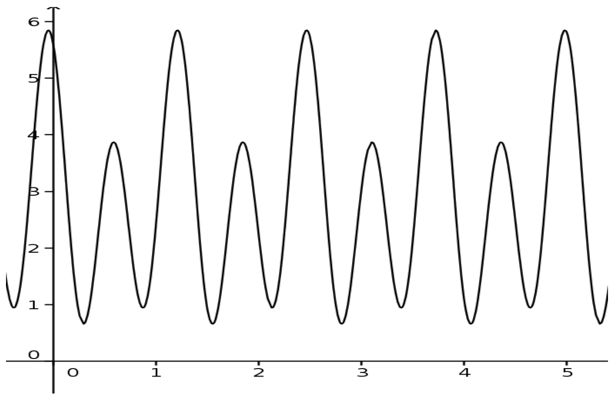
Remarque : on peut bien sûr écrire ces calculs de façon plus simple, mais il s'agit aussi ici de s'habituer à des notations qui seront indispensables plus loin ...

Voir les exercices 1 à 8

4 [A savoir] Intégrale de Riemann

Jusque-là, nous avons considéré des fonctions croissantes sur un intervalle $[a;b]$; cela nous a permis de déterminer facilement les hauteurs permettant de construire les petites et grandes sommes, en choisissant les valeurs sur les bords des sous-intervalles.

Pour une fonction strictement décroissante, on pourrait procéder de façon symétrique, mais comment procéder avec une fonction comme celle ci-dessous si on souhaite une approximation de l'aire délimitée par l'axe $0x$, les droites $x=0$ et $x=5$ et la courbe $y = f(x)$ en prenant par exemple dix sous intervalles équidistants ?



On ne peut plus se contenter de considérer des x_i sur les bords des sous-intervalles.

Nous allons donc devoir généraliser l'approche ...

Définition « Sommes de Riemann »

Soit $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$ avec $a\leq b$.

On partage $[a;b]$ en n sous-intervalles équidistants de longueur $\frac{b-a}{n}$

et on note $\Delta x=\frac{b-a}{n}$

On pose : $x_0=a$

$$x_1=a+\Delta x=a+\frac{b-a}{n}$$

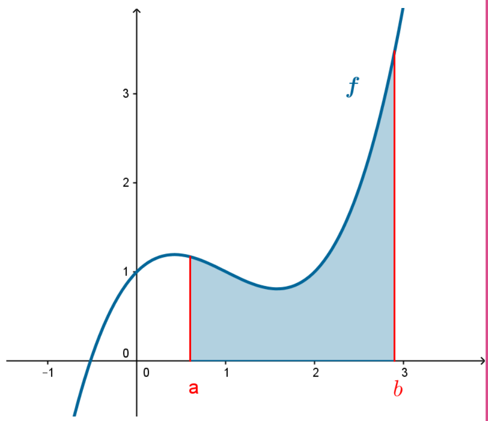
$$x_2=a+2\Delta x=a+2\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$x_3=a+3\Delta x=a+3\cdot\frac{b-a}{n}$$

...

$$x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x=a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}$$

et donc : $x_n=a+n\Delta x=a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b$



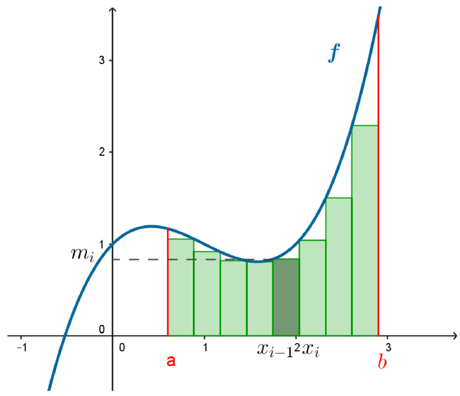
On définit, si cela est possible, les minima m_i et maxima M_i sur chaque sous-intervalle :

$$M_i=\max_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \text{ pour } i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

$$m_i=\min_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \text{ pour } i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

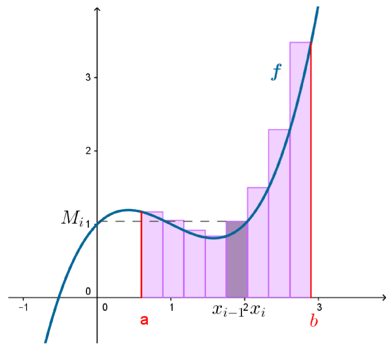
On définit les **petites sommes de Riemann** :

$$s_n = \Delta x\, m_1 + \Delta x\, m_2 + \Delta x\, m_3 + \ldots + \Delta x\, m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, m_i$$



puis les **grandes sommes de Riemann** :

$$S_n = \Delta x\, M_1 + \Delta x\, M_2 + \Delta x\, M_3 + \ldots + \Delta x\, M_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, M_i$$



Remarque : on a toujours $s_n \leqslant S_n$.

On calcule :

les limites des petites sommes $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$

et des grandes sommes $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$

Et enfin on définit :
f est **intégrable** sur $[a;b]$ (au sens de Riemann) si et seulement si ces deux limites existent et sont égales à un nombre réel I (c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = I$)

On dit alors que I est **l'intégrale** de f entre a et b et on note : $I = \int_a^b f(x)\, dx$

Explication de la notation

Le signe $\int$ symbolise un S [pour somme] stylisé [pour le passage à l'infini],
$\int_a^b f(x)\, dx$ signifie donc "somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment petite dx, x parcourant l'intervalle $[a;b]$"

Exemple : soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=1$.

On partage [0;1] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x = \frac{1}{n}$

On pose :

$x_0 = 0$

$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{1}{n}$

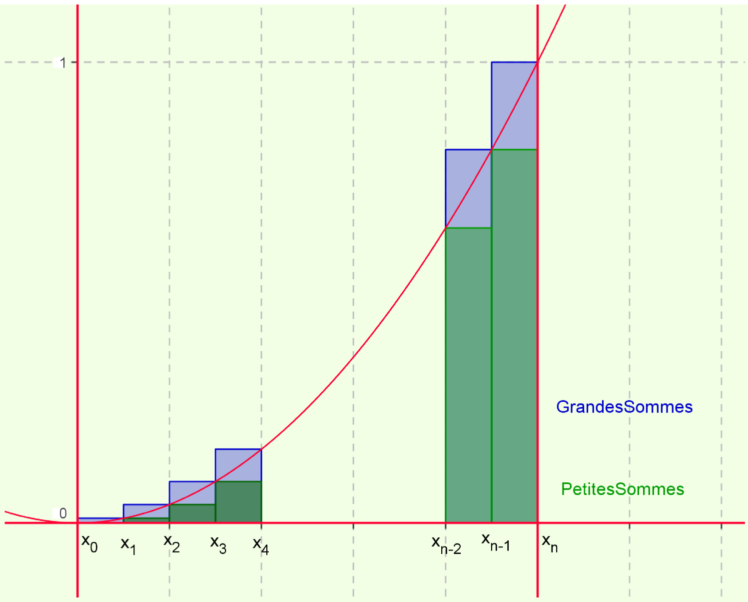
$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{2}{n}$

$x_3 = 0 + 3\Delta x = \frac{3}{n}$

...

$x_{n-1} = 0 + (n-1)\Delta x = \frac{n-1}{n}$

$x_n = 0 + n\Delta x = \frac{n}{n} = 1$



Comme la fonction est croissante sur [0;1], on peut facilement déterminer les m_i et les M_i:

$M_1 := f(x_1)$, $M_2 := f(x_2)$, $M_3 := f(x_3)$, …, , $M_n := f(x_n)$

$m_1 := f(x_0)$, $m_2 := f(x_1)$, $m_3 := f(x_2)$, …, , $m_n := f(x_{n-1})$

On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x \cdot M_1 + \Delta x \cdot M_2 + \Delta x \cdot M_3 + \ldots + \Delta x \cdot M_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i \\
&= \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) \\
&= \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{2^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{3^2}{n^2}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)
\end{aligned}$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

On calcule la somme des aires des petits rectangles:

$$s_n = \Delta x \cdot m_1 + \Delta x \cdot m_2 + \Delta x \cdot m_3 + \ldots + \Delta x \cdot m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot m_i$$

$$= \Delta x\cdot f(x_0)+\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\ldots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n}\cdot f(0)+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(2\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(3\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n}\cdot f((n-1)\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n}(0)^2+\frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(2\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(3\frac{1}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}((n-1)\frac{1}{n})^2$$

$$= \frac{1}{n}(\frac{0}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^2$$

$$= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

et donc: $s_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

On avait $s_n \leqslant A \leqslant S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{1}{3} \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$

Donc $A=\frac{1}{3}$. On dit que f est intégrable sur [0;1] (au sens de Riemann) et on note

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

Remarques

- si $f(a)$ existe, alors $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

- lorsqu'une fonction est continue et croissante ou décroissante sur un intervalle donné, il est possible de déterminer les minima m_i et les maxima M_i sur chacun des n intervalles équidistants de longueur $\frac{b-a}{n}$ car ils sont toujours égaux à un $f(x_i)$; dans les cas contraires, c'est le plus souvent impossible !

- si vous disposez d'une calculatrice performante, d'un logiciel sur un smartphone, une tablette ou un ordinateur, vous pouvez assez facilement programmer ou paramétrer pour calculer facilement les petites et grandes sommes de Riemann dans le cas d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle ;

- * pour autant que la longueur de chacun des Δx tende vers 0 quand n tend vers l'infini, on peut prouver que, quand elles existent, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne dépendent pas du partage de l'intervalle [*a*;*b*] que l'on a choisi ; on peut donc se permettre de ne considérer que les partages équidistants, à savoir ceux que nous avons utilisés jusqu'à présent.

5 [A savoir] Question à propos de l'intégrale

Intégrales calculées géométriquement ou avec la définition

Nous savons que pour tout a et b des nombres réels tels que $a < b$:

[I1] : $\int_a^b 1\,dx = b - a$: par approche géométrique d'un calcul d'aire;

[I2] : $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$: par approche géométrique d'un calcul d'aire;

[I3] : $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$: démontré avec la définition de l'intégrale ;

[I4] : $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$: démontrable avec la définition de l'intégrale.

Intégrale ?

Une intégrale est une limite de somme dont le nombre de termes tend vers l'infini et où chacun des termes tend vers zéro (dans notre définition). Le calcul intégral est un outil qui permet par approximation et passage à la limite d'effectuer des mesures à priori complexes. Il est toujours essentiel de bien contrôler l'erreur commise durant tout le processus afin de s'assurer qu'elle tende bien vers 0 lors du passage à la limite.

On peut ainsi mesurer des aires, des volumes, des débits et bien d'autres quantités physiques.

Avec la dérivée – qui peut se généraliser en « différentielle », c'est l'une des deux branches du calcul différentiel et intégral (ou calcul infinitésimal) issu des travaux de Newton et Leibnitz au XVIIe siècle.

Intégrale = aire ?

Une intégrale ne représente donc pas forcément une aire. Par ailleurs, lorsque le calcul intégral est utilisé pour dans le but de calculer une aire sous une courbe, il faut faire très attention au signe de la fonction.

☐ Si $f(x)$ est positive (ou nulle) sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'aire sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$.

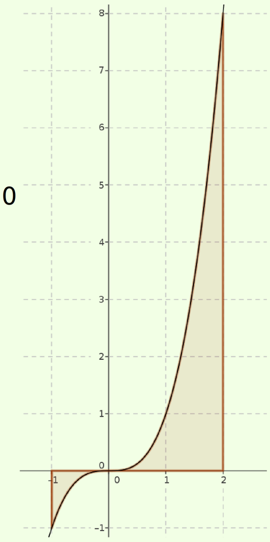
☐ Si $f(x)$ est négative (ou nulle) sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ est égale à l'aire sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$. Dans ce cas l'intégrale est égale à l'aire avec un signe négatif ; on parle aussi d'**aire algébrique**.

☐ Lorsque $f(x)$ change de signe sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors il faut décomposer le problème en travaillant sur les sous-intervalles où la fonction est de signe constant.

Remarque : nous formaliserons cela (Propriétés de l'intégrale) et l'utiliserons dans des situations concrètes (Applications) dans des sections suivantes.

Exemple : calculer l'aire sous la courbe $y=x^2$ délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=-1$ et $x=2$

On représente la situation :



la fonction est négative sur [-1;0], il faut donc calculer $\int_{-1}^{0} x^3\,\mathrm{d}x$ qui sera négative est prendre sa valeur absolue, puis calculer $\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$ qui elle donnera directement l'aire sous la courbe entre 0 et 2 :

Aire= $\left|\int_{-1}^{0} x^3\,dx\right| + \int_0^2 x^3\,dx$

Pour cela, on utilise $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$:

Aire= $\left|\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right| + \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \left|\frac{-1}{4}\right| + \frac{16}{4} = \frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4}$

Toujours intégrable ?

Il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables sur un intervalle donné $[a;b]$

Exemple : que penser de l'intégrale de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[a;b]$ = [-1;1] ?

On peut partager [-1;1] en n sous-intervalles équidistants. L' un de ces sous-intervalles contiendra forcément 0. Or la fonction n'est pas définie en 0 et prend des valeurs tendant vers l'infini lorsqu'on se rapproche de 0 ; le minimum n'existe donc pas dans ce sous-intervalle, on ne peut pas calculer S_n ! L'intégrale de f sur [-1;1] n'existe pas au sens où nous l'avons définie.

Théorème « Critère d'intégrabilité » [non démontré]

Si f est continue sur [a;b], alors f est intégrable sur [a;b]

Remarque : la réciproque est fausse ; il existe des fonctions non continues sur [a;b] mais qui sont intégrables sur [a;b].

Exemple : calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in [0;1[\\ 2, \text{si } x = 1 \end{cases}$ sur [0;1]

On partage [0;1] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

on pose : $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, ..., $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$ et $x_n=\frac{n}{n}=1$

on a : $m_1:=m_2:=\ldots=m_n:=1$, et $M_1:=M_2:=M_3:=\ldots=M_{n-1}=0$ mais $M_n:=2$

d'où $s_n=\Delta x\cdot m_1+\Delta x\cdot m_2+\Delta x\cdot m_3+\ldots+\Delta x\cdot m_n=\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\ldots+\Delta x\cdot 1=n\cdot\Delta x$

et $S_n=\Delta x M_1+\Delta x M_2+\ldots+\Delta x\cdot M_{n-1}+\Delta x M_n$
$=\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\ldots+\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 2=(n-1)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot 2=\Delta x\cdot\left((n-1)+2\right)=\Delta x\cdot(n+1)$

d'où $\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\Delta x=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty} 1=1$

et $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\Delta x\cdot(n+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot(n+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n}=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=1+0=1$

ainsi $\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} S_n=1$, c'est-à-dire que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$

6 [A savoir] Propriétés des intégrales

Notation

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur [a;b].
Alors on a :
$f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$

Exemples : $x^3\Big|_0^2=2^3-0^3=8$, $\int_a^b x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$, $\int_a^b x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$ et $\int_a^b x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_a^b$

Définitions

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur [a;b]. Alors on a $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple : calculer $\int_3^1 x^2\,dx$

$\int_3^1 x^2\,dx=-\int_1^3 x^2\,dx$, par définition

$=-(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3})$, par $\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$

$=-8$

Théorèmes «Propriétés des intégrales » [sans démonstration

Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur [a;b]. Alors on a :

[PrI1] : $\int_a^b k\,dx=k\cdot(b-a),\forall k\in\mathbb{R}$

[Prl2] : $k\,f$ est intégrable sur [*a*;*b*] et on a $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, $\forall\ k\in\mathbb{R}$

[Prl3] : $(f+g)$ est intégrable. sur [*a*;*b*] et on a $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

[Prl4] : $(f-g)$ est intégrable. sur [*a*;*b*] et on a $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

[Prl5] : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : c'est aussi vrai si $a < b < c$ et f intégrable sur [*a*;*c*] !)

[Prl6] : si $f(x)\geq 0, \forall\ x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

[Prl7] : si $f(x)\leq 0, \forall\ x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

[Prl8] : si $f(x)\geq g(x), \forall\ x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque : grâce à ces propriétés, on peut calculer de nouvelles intégrales à partir de celles qui sont déjà connues.

Exemple : calculer $\int_0^2 2x^3-5\,dx$

$$\int_0^2 2x^3-5\,dx \overset{\text{Prl4}}{=} \int_0^2 2x^3\,dx - \int_0^2 5\,dx \overset{\text{Prl2}}{=} 2\int_0^2 x^3\,dx - \int_0^2 5\,dx \overset{\text{Prl1}}{=} 2\int_0^2 x^3\,dx - 5\cdot(2-0) \overset{\text{I4}}{=} 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 10$$

$$\overset{\text{notation}}{=} 2\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)-10 = 2\cdot\frac{16}{4}-10 = -2$$

Voir les exercices 9 à 17

7 [A savoir] Primitives et intégrales

Théorème de la moyenne

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Alors il existe au moins un $c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$

Théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) « relation entre intégrale et dérivée »

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$. et $x_0\in[a;b]$,

et soit une nouvelle fonction F définie par $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t, \forall x\in[a;b]$.

Alors, on a: F est dérivable et $F'(x)=f(x), \forall\ x\in]a;b[$

Définitions

F est une **primitive** de f sur $I \Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in I$

Exemple : déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$.

F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f [sur $\mathbb{R}$], car $(x^3)'=3x^2$

G définie par $G(x)=x^3+1$ est une autre primitive de f [sur $\mathbb{R}$], car $(x^3+1)'=3x^2$

Remarques :

- on écrit plus simplement $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$;
- on omet souvent, en particulier lorsque cela n'est pas la question principale, d'indiquer l'intervalle sur lequel on travaille ; par défaut, de façon implicite, c'est le plus grand intervalle possible sur lequel F est une primitive de f.

Théorème « Relation entre toutes les primitives d'une fonction donnée »

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f.
Alors on a : $F(x)=G(x)+c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Définitions

$\int f(x)\mathrm{d}x$ représente l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f.
On parle aussi d'**intégrale indéfinie**.
On écrit alors $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, où F est une primitive de f et C une constante réelle.

Exemple : déterminer toutes les primitives de (la fonction f définie par) $f(x) = 3x^2$ et interpréter graphiquement.

On soit déjà que $F(x)=x^3$ est une primitive de f.

Il suffit donc d'ajouter la constante : $F(x)=x^3+C$ sont toutes les primitives de f,

ce qu'on peut écrire $\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$.

Interprétation graphique

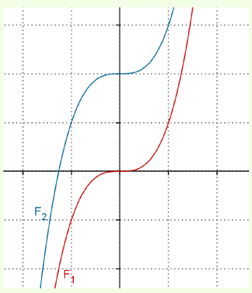
Graphiquement, le fait que toutes les primitives d'une fonction donnée ne diffèrent que d'une constante s'interprète ainsi : toutes les courbes représentatives des primitives sont translatées verticalement les unes par rapport aux autres.

Exemple : déterminer toutes les primitives de (la fonction f définie par) $f(x) = 3x^2$ et interpréter graphiquement

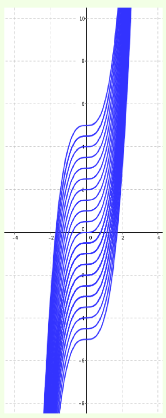
Nous avons vu que toutes les primitives de de f

sont les fonctions de la forme $F(x)=x^3+C$

Graphiquement : toutes ces courbes sont des translations verticales de la fonction F définie par $F(x)=x^3$



deux primitives


beaucoup de primitives

Condition initiale

Il arrive qu'on impose une demande supplémentaire à une primitive de f, comme par exemple que sa courbe représentative passe par un point donné. Cette demande s'appelle une **condition initiale** et il existe une unique primitive de f qui satisfasse une condition initiale donnée (dans les cas où les primitives existent!).
Graphiquement, cela revient à choisir parmi toutes les primitives celles dont la courbe représentative passe par ce point.

Exemple : déterminer la primitive de (la fonction f définie par) $f(x) = 3x^2$ telle que $F(1) = 2$ et interpréter graphiquement

Nous avons vu que toutes les primitives de de f

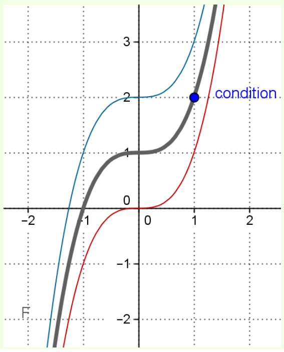
sont les fonctions de la forme $F(x)=x^3+C$

On veut que $F(1) = 2$, c'est-à-dire que $1^3+C = 2$,

d'où $C = 1$

la primitive recherchée est $F(x)=x^3+1$

Graphiquement, c'est celle dont la courbe représentative passe par le point (1;2)



Théorème fondamental II (du calcul différentiel et intégral) « Théorème de Newton-Leibnitz »

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in I$, $b \in I$ et G une primitive de f sur I.

Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b)-G(a)$.

Remarque : ce théorème indique comment calculer beaucoup plus simplement une intégrale en utilisant la notion de primitive !

Exemple : calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ et interpréter graphiquement le résultat.

Il suffit de trouver une primitive de (la fonction f définie par) $f(x) = \cos(x)$:

quelle est la fonction dont la dérivée donne $\cos(x)$? C'est $\sin(x)$!

d'où : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\pi}$

$= \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1-0 = -1$

Graphiquement : comme la fonction est toujours négative sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ l'intégrale calcule l'aire algébrique sous la courbe dans cet intervalle, soit l'aire avec un signe négatif !

8 [A savoir] Trouver une primitive

Soit une fonction réelle f définie par une expression algébrique $f(x)$ un intervalle I. Si f est continue, on sait qu'une primitive F existe [par thm «fondatmental I], et même une infinité de primitives $G = F + cte$ [par thm « Relation entre toutes les primitives d'une fonction donnée ». L'objectif est de déterminer une expression algébrique pour $F(x)$ afin de pouvoir calculer (plus) facilement des intégrales [par thm «fondatmental II],

Primitives élémentaires à connaître

Pour simplifier l'écriture, on écrira $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ au lieu de $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$; on se permet ce type de simplification lorsqu'on est certain de bien maîtriser les concepts, à savoir quand on sait si on doit calculer une intégrale, déterminer une primitive ou déterminer toutes les primitives !

[P1] : $\int 0\,\mathrm{d}x = cte$ ou « cte est une primitive de 0 » [à mettre en relation avec $(cte)' = 0$]

[P2] : $\int 1\,\mathrm{d}x = x$ ou « x est une primitive de 1 » [à mettre en relation avec $(x)' = 1$]

[P3] : $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$ ou « $\frac{x^2}{2}$ est une primitive de x » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$]

[P4] : $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$ ou « $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2 » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$]

[P5] : $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}$ ou « $\frac{x^4}{4}$ est une primitive de x^3 » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^4}{5}\right)' = x^3$]

[P6] : $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ou « $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n » [cf $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$]

[P7] : $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}$ ou « $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ » [cf $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]

[P8] : $\int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}$ ou $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}$ ou « $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ » [cf $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$]

[P9] : $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)$

[P10] : $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)$ ou $\int -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)$

[P11] : $\int 1+\tan^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x)$

Remarque : il faut évidemment mettre en relation ces résultats avec la connaissance des dérivées élémentaires (souvenir de 3[e] ...) ; on peut ainsi aussi lire le tableau précédent ainsi :

[P1] : « cte est une primitive de 0 » [à mettre en relation avec $(cte)' = 0$]

[P2] :« x est une primitive de 1 » [à mettre en relation avec $(x)' = 1$]

[P3] : « $\frac{x^2}{2}$ est une primitive de x » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$]

[P4] : « $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2 » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$]

[P5] :« $\frac{x^4}{4}$ est une primitive de x^3 » [à mettre en relation avec $\left(\frac{x^4}{5}\right)' = x^3$]

[P6] : « $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n » [cf $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$]

[P7] : « $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ » [cf $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]

[P8] : « $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ » [cf $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$]

[P9] : $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$ » [cf $(\sin(x))' = \cos(x)$]

[P10] :- $\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$ » [cf $(\cos(x))' = -\sin(x)$]

[P11] :- $\tan(x)$ est une primitive de $1+\tan^2(x)$ » ou de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ [cf $(\tan(x))' = 1+\tan^2(x) = ...$

Théorème « Propriétés des primitives »

Aux théorèmes sur les dérivées correspondent bien sûr des théorèmes sur les primitives :

Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur [a;b]. Alors on a :

[PrP1] : $\int k\,dx=k\cdot(b-a), \forall k\in\mathbb{R}$

[PrP2] : $k\,f$ est intégrable sur [a;b] et on a $\int k\,f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx, \forall k\in\mathbb{R}$

[PrP3] : $\int f(x)+g(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[PrP4] : (f - g) est intégrable. sur [a;b] et on a $\int f(x)-g(x)dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

Remarque : comme la dérivée du produit n'est pas égale au produit des dérivées (rappel : $(f(x)\cdot g(x))'dx\neq f'(x)\cdot g'(x)$ mais $(f(x)\cdot g(x))'dx=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$, il n'y a pas de formule « simple » pour la primitive d'un produit !

Par contre, on peut récrire la formule pour la dérivée de la composée :

[PrP6] : $\int g'(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=g(f(x))$

Méthode pour déterminer une primitive

1 S'agit-il d'une d'une primitive élémentaire ?

Exemple : déterminer $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$: il s'agit d'une primitive élémentaire à connaître

2 Peut-on utiliser les propriétés des primitives, en particulier « sortir » les constantes multiplicatives du calcul et/ou décomposer en sommes/différences ?

Exemple : déterminer $\int (3x^2-2)\mathrm{d}x$

$$\int (3x^2-2)\mathrm{d}x \overset{\text{PrI1 + PrI3}}{=} 3\int x^2\mathrm{d}x-2\int 1\,\mathrm{d}x \overset{\text{P4 + P3}}{=} 3\frac{x^3}{3}-2x=x^3-2x$$

3 Peux-on récrire $f(x)$ pour simplifier le calcul ?

Exemple : déterminer $\int \frac{x^3+2}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x^3+2}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^3}{x^2}+\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int x+\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x+2\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}$$

4 Peut-on utiliser la composition $\int g'(f(x))\cdot f'(x)\mathrm{d}x=g(f(x))+C$?

Exemple : déterminer $\int 3x^4(x^5-2)^7\mathrm{d}x$

$\int 3x^4(x^5-2)^7\mathrm{d}x$ [on travaille autour du pivot "x^5-2 "]

$=\int \frac{3}{5}[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\mathrm{d}x$ [on fait apparaître la dérivée interne]

$=\frac{3}{5\cdot 8}\int 8[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\mathrm{d}x$ [on corrige les constantes]

$=\frac{3}{5\cdot 8}\cdot(x^5-2)^8$ [il n'y a "plus" qu'à conclure !]

on peut vérifier que : $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{(x^5-2)^8}{8}\right)'=3x^4(x^5-2)^7$

on peut aussi travailler avec les fonctions en évitant le symbole : $\int$

On pose : $f(x)=3x^4(x^5-2)^7$

on récrit pour faire apparaître ce qui nous arrange : $f(x)=\frac{3}{5\cdot 8}(8[(x^5-2)^7\cdot 5x^4])$

d'où on peut obtenir : $F(x)=\frac{3}{5\cdot 8}\cdot(x^5-2)^8$

Remarque : on peut savoir que la primitive existe – car la fonction est continue sur l'intervalle considéré – tout en n'arrivant pas à déterminer une expression algébrique (c'est même ce qui arrive le plus souvent, sauf dans les cas où tout a été « préparé » pour qu'on puisse déterminer $F(x)$!

Voir les exercices 18 à 22

9 [A savoir] Aire entre deux fonctions

Méthode

Considérons une représentation graphique de deux fonctions continues f et g données et $A=(a;f(a))$ et $B=(b;f(b))$ deux points d'intersection de leurs courbes représentatives.
L'aire de la surface délimitée par ces deux courbes entre A et B est toujours donnée par $\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a;b]$ et par $\int_a^b g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $g(x)\geq f(x), \forall x\in[a;b]$.
Il s'agit donc dans tous les cas de connaître les points d'intersection des deux courbes, de poser le(s) calcul(s) d'intégrale(s) et enfin de calculer cette (ces) intégrale(s),

Exemple : déterminer la valeur de l'aire de la surface délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

On commence par représenter graphiquement la situation ; pour cela, on doit calculer quelques paramètres :

$f(x) = x(x^2 -5x + 6) = x(x-2)(x-3)$, d'où $Z_f = \{0;2;3\}$

Tableau de signes de f, polynomiale de degré 3 :

x		0		2		3	
x	–	0	+	+	+	+	+
$x-2$	–	–	–	0	+	+	+
$x-3$	–	–	–	–	–	0	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

remarque : on peut aussi utiliser la multiplicité des zéros pour éviter le tableau de signes.

$g(x) = x(x-3)$, d'où $Z_g = \{0;3\}$; g polynomiale de degré 2 et $a>0$, donc représentée par une parabole convexe.

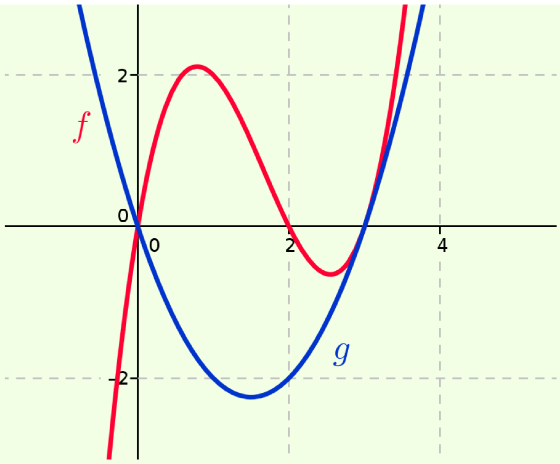
Il s'agit d'être certains que la courbe rouge est bien toujours au dessus de la courbe bleue (voir page suivante). Pour cela, il faut déterminer les points d'intersection :

$f(x)= g(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = x^2 -3x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)^2 = 0$

d'où on déduit qu'il n'y a bien que deux points d'intersection d'abscisses $x=0$ et $x=3$ et que la courbe rouge est bien toujours au dessus de la courbe bleue !

On peut poser le calcul d'intégrale :

$$\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)-(x^2-3x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^3 x^3-6x^2+9x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\Big|_0^3$$
$$=\frac{3^4}{4}-6\cdot\frac{3^3}{3}+9\cdot\frac{3^2}{2}$$
$$=\frac{81}{4}-6\cdot 9+9\cdot\frac{9}{2}$$
$$=\frac{81-216+162}{4}=\frac{277}{4}=6{,}75$$



Remarque : si jamais le résultat est négatif, il y a bien sûr une faute quelque part ...

10 [A savoir] Volume de révolution

Définition

On appelle **corps de révolution** l'espace occupé par la rotation d'une surface plane autour d'un axe coplanaire extérieur (ou tangent) à cette surface et **volume de révolution** le volume d'un tel corps.

Remarque : chaque point de la surface engendrant un corps de révolution décrit un cercle en tournant autour de l'axe de rotation.

Théorème

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$. Alors le volume V du corps engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe de , f l'axe des x et les verticales passant par a et b, autour de l'axe des x est donné par $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple : déterminer le volume de révolution engendré par la rotation de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$ autour de l'axe Ox (et délimité par les droites x=0 et x=3

$$V=\pi\int_0^3 (x^2-3x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^3 x^4-6x^3+9x^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-6\frac{x^4}{4}+9\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$$
$$=\pi\left(\frac{3^5}{5}-6\cdot\frac{3^4}{4}+9\cdot\frac{3^3}{3}\right)=\pi\frac{81}{10}\simeq 25{,}4$$

Remarque : attention, lorsqu'on veut calculer le volume de révolution engendré par la surface comprise entre deux courbes, il faut bien calculer $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$ qui n'est pas égal à $V=\pi\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x$!

11 [Aller plus loin] Longueurs

Théorème

Soit une fonction f telle que f' (sa dérivée!) soit continue sur $[a;b]$.
Alors la longueur L de la courbe du graphe de f entre les points $A = (a;f(a))$ et $B = (b;f(b))$ est donnée par $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Exemple : déterminer la longueur de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x$ entre les points $A = (0;f(0))$ et $B = (3;f(3))$

$f'(x) = 2x - 1$, d'où : $L=\int_0^3 \sqrt{[1+(2x-1)]^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{(2x)^2}\,dx \overset{\text{non négatif sur }[0;3]}{=} \int_0^3 2x\,dx = x^2\Big|_0^3 = 9$

Voir les exercices 23 à 28

12 [Aller plus loin] Intégration par parties

Théorème « Intégration par parties »

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, et $[a;b]\subseteq I$. Alors on a :

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \quad (+C) \text{ et}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Remarque :

- c'est la version « intégrale » de la formule de dérivation du produit ! Cette méthode est à essayer lorsqu'on a affaire à une intégrale (ou à une recherche de primitive) qui contient un produit de deux fonctions et que les autres méthodes connues ne fonctionnent pas ;
- la difficulté consiste à faire le bon choix pour décider qui joue le rôle de $f'(x)$ et de $g(x)$ dans le produit qu'on doit intégrer ; pour décider, il faut comprendre que l'intégration par parties consiste à remplacer un calcul d'intégrale par un autre - qu'on espère plus simple - dans lequel on remplace $f'(x)$ par $f(x)$ et $g(x)$ par $g'(x)$. L'une des deux facteurs est remplacé par sa dérivée, l'autre par une primitive. Il faut donc opérer le choix qui permet d'obtenir dans ce nouveau produit quelque chose de plus facile à intégrer …
- il est parfois nécessaire de procéder à plusieurs intégrations par parties successives …

Exemple : déterminer $\int x\sin(x)\mathrm{d}x$

On choisit de poser : $f'(x)=\sin(x)$ et $g(x)=x$, ainsi on a : $f(x)=-\cos(x)$ et $g'(x)=1$

d'où

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)\cdot x - \int 1\cdot(-\cos(x))\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \int \cos(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x)$$

remarque : on vérifie bien que
$$\begin{aligned}[-x\cos(x)+\sin(x)]' &= [-x\cos(x)]' + [\sin(x)]' \\ &= [(-1)\cdot\cos(x) + (-x)\cdot(-\sin(x))] + [\cos(x)] \\ &= -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)\end{aligned}$$

Voir les exercices 29 à 32

Exercices d'entraînement

Aires et sommes

1 Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer géométriquement la valeur de l'aire de la surface délimitée par l'axe 0x, les droites $x = a$ et $x = b$ et la courbe $y = f(x)$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=4$

d. $f(x)=x+2, a=0, b=4$

e. $f(x)=-5, a=-2, b=2$

f. $f(x)=2x, a=-2, b=2$

g. $f(x)=|2x|, a=-2, b=2$

h. $f(x)=|x-2|, a=0, b=4$

i. $f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=-2, b=2$

j. $f(x)=-\sqrt{16-x^2}, a=-4, b=0$

k. $f(x)=\sqrt{4-(x-3)^2}+5, a=1, b=3$

2 Expliciter les notations suivantes :

a. $\sum_{i=1}^{5} i$

b. $\sum_{i=7}^{12} i$

c. $\sum_{i=4}^{10} \frac{1}{i}$

d. $\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \cdot i$

e. $\sum_{i=1}^{7} (-1)^{i+1} \cdot 2i$

f. $\sum_{i=3}^{8} i^2$

3 Ecrire à l'aide de la notation pour les sommes suivantes :

a. 1 + 2 + 3 + ... + 100

b. 7 + 8 + 9 + ... + 999999

c. 12 + 14 + 16 + ... + 1000

d. les nombres impairs positifs inférieurs ou égaux à 50

e. $-1+4-9+16+...-169$

f. $3-6+9-...-63$

4 Expliciter les notations suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{6} f(x_i)$

b. $\sum_{i=11}^{16} f(x_i)$

c. $\sum_{i=1}^{5} i \cdot f(x_i)$

5 Ecrire à l'aide de la notation pour les sommes suivantes :

a. $a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5-6a_6$

b. $f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+f(x_3)(x_3-x_2)$

6 Calculer avec la calculatrice

a. $\sum_{i=1}^{100} 2i$

b. $\sum_{i=32}^{100} 2i+1$

7 En travaillant avec des partages de l'intervalle $[a;b]$ en 4 segments équidistants, approximer l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites $x=a$ et $x=b$ et la courbe $y=f(x)$ donnée par :

a. $y=8x-1$; $a=1$; $b=4$

b. $y=x^2$; $a=0$; $b=3$

8 Utiliser la calculatrice pour approximer l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites $x=1$ et $x=4$ et la courbe $y=8x-1$ en travaillant avec un partage de l'intervalle en 8 segments équidistants, puis en 16,

2 Voir la théorie 1 à 3

Intégrale de Riemann

9 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

Déterminer à l'aide de grandes et petites sommes de Riemann l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x, x=0 et x=3.

10

a. Déterminer la valeur de l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites x=0 et x=1 et la courbe représentative de $y = x^3$ en utilisant la définition de l'intégrale.

Indication : utiliser la formule

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b. Même question avec x=0 et x=3.

c. Même question avec x=0 et x=b et $b\geq 0$

d. Même question avec $x= a$ et $x=b$ et $0\leq a\leq b$

e. Même question avec $a\leq b\leq 0$

f. Même question avec $a\leq 0\leq b$

11 * Qui était Riemann? Quand et où a-t-il vécu?

12 Soit $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x=0$. Que peut-on en déduire quant à a ?

13 Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=4$

d. $f(x)=x+2, a=0, b=4$

e. $f(x)=-5, a=-2, b=2$

f. $f(x)=2x, a=-2, b=2$

g. $f(x)=|2x|, a=-2, b=2$

h. $f(x)=|x-2|, a=0, b=4$

i. $f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=-2, b=2$

j. $f(x)=-\sqrt{16-x^2}, a=-4, b=0$

k. $f(x)=\sqrt{4-(x-3)^2}+5, a=1, b=3$

l. $f(x)=\sin(x), a=-\pi, b=pi$

14 Déterminer :

a. $\left.\dfrac{3x}{x-1}\right|_{-1}^{2}$

c. $\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{a}^{b}$

b. $\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{a}^{b}$

15 Déterminer :

a. $\int_2^2 x^3\,\mathrm{d}x$

c. $\int_2^0 x^2\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{2\pi}^0 \sin(x)\,\mathrm{d}x$

d. $\int_{-2}^{-4} x^2\,\mathrm{d}x$

16 Déterminer, en justifiant chaque étape, les intégrales ci-dessous :

a. $\int_2^3 (x^3+x)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{-2}^1 \dfrac{2x^3-x^2+3x}{5}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{-2}^1 (-3x-1)\,\mathrm{d}x$

17 Exprimer en une seule intégrale :

a. $\int_5^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-3}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x+\int_e^c f(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_c^h f(t)\,\mathrm{d}t$

d. $\int_c^m f(x)\,\mathrm{d}x-\int_d^m f(x)\,\mathrm{d}x$

Voir la théorie 4 à 6

Primitives

18 Quel est le nombre c qui satisfait la conclusion du théorème de la moyenne pour la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+1$ sur l'intervalle $[0;2]$? Interpréter graphiquement.

19 Déterminer une primitive pour toutes les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)= 2x-1$

b. $f(x)=x^3-5x^2+3x-2$

c. $f(x)=\dfrac{5}{3}x^4-\dfrac{3}{4}x^2+1$

d. $f(x)= (2x)^3$

e. $f(x)= (x+1)^2$

f. $f(x)=(2x+1)^3$

g. $f(x)=(2-x)^{12}$

h. $f(x)=(4x-2)^5$

i. $f(x)=6x(3x^2+1)^2$

j. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

k. $f(x)=6x(1-x^2)^3$

l. $f(x)=(1-2x)^2$

m. $f(x)= 2x+1-\dfrac{1}{x^2}$

n. $f(x)= \dfrac{1}{(x-1)^2}$

o. $f(x)= 1+\dfrac{1}{x^2}$

p. $f(x)= 4+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x}5$

q. $f(x) = -\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}$

r. $f(x) = x^3-\frac{1}{x^2}$

s. $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2}$

t. $f(x) = \frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

u. $f(x) = \frac{2}{x^3}+\frac{1}{2x^2}$

v. $f(x) = (3x+2)^6$

w. $f(x) = (4x^2-5x)^2(16x-10)$

x. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

y. $f(x) = x\sqrt{x}$

z. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

aa. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

ab. $f(x) = \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

ac. $f(x) = \sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

ad. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

ae. $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

af. $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

ag. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

ah. $f(x) = (3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}$

ai. $f(x) = 2\sqrt{x}+\sqrt{2x}$

aj. $f(x) = 2x+\sqrt[3]{x}$

ak. $f(x) = 2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

al. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

am. $f(x) = (x+2\sqrt{x})^2$

an. $f(x) = (2x-5)\sqrt{x^2-5x+6}$

ao. $f(x) = \cos(x)\sqrt{\sin(x)}$

ap. $f(x) = \sin(3x)$

aq. $f(x) = 1+tg^2(2x)$

ar. $f(x) = 2\sin(x)+3\cos(x)$

as. $f(x) = tg^2(x)$

at. $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x)$

au. $f(x) = \sin^5(x)\cos(x)$

av. $f(x) = \sin(x)\cos^4(x)$

aw. $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

ax. $f(x) = \sin(x)(1-\cos(x))$

ay. $f(x) = \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$

az. $f(x) = \cos(x)-\sin^2(x)\cos(x)$

ba. $f(x) = \frac{\cos(x)}{(4\sin(x)-1)^3}$

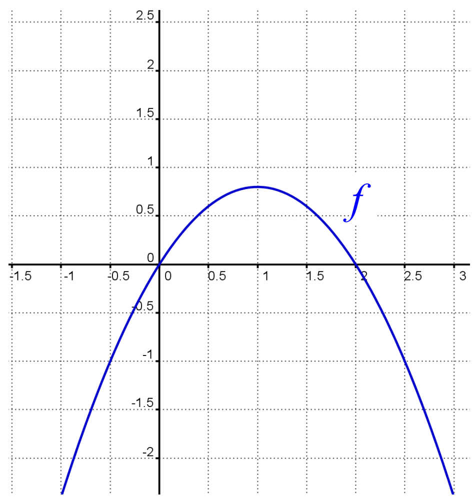
20 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a. $\int(4x+3)dx$ **b.** $\int(4t+3)dx$

21 On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les trois cas. Dans les 3 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

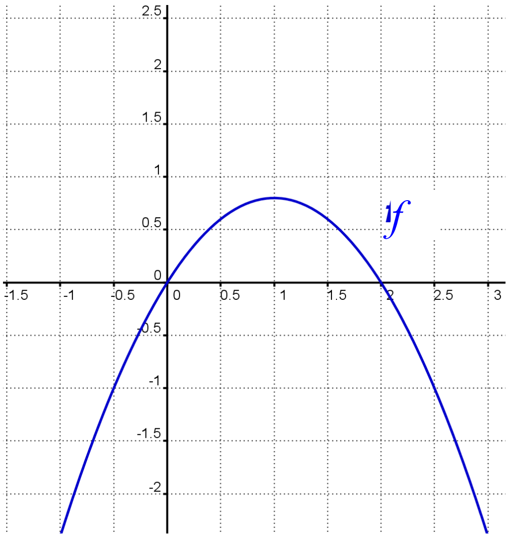
Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :

a.



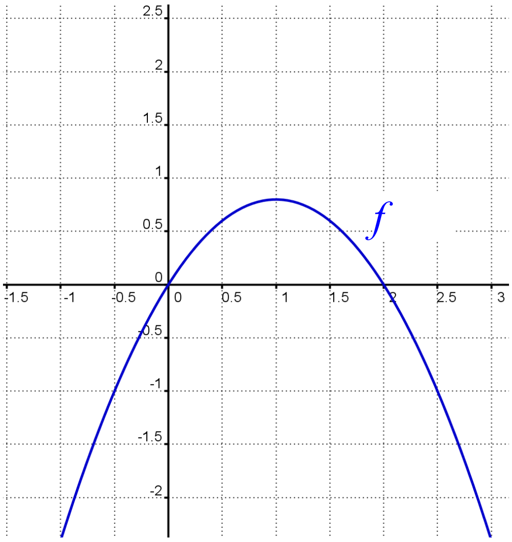
b. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \ :$$



c. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par

$$G(x)=\int_2^x f(t)\,dt \ :$$



22 On considère la fonction f définie par $f(x)=5x^2+14$

a. Déterminer F, une primitive de la fonction f.

b. Déterminer toutes les primitives de f

c. Parmi les primitives de la fonction f, y en a-t-il une (ou plusieurs) qui passe(nt) par le point $(0;2)$?

Voir la théorie 7 à 8

Applications

23 Calculer les aires des surfaces délimitées par les deux courbes données :

a. $y=1+4x-x^2$ et $y=1+x^2$

b. $y=x^3-x^2-2x+2$ et $y=2$

c. $y=x^2$ et $y=x^3$

d. $y=x^3$ et $y=3x+2$

24 On considère la surface délimitée dans le premier quadrant par les axes de coordonnées et les courbes des fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ et $g(x)=1$.

a. Représenter graphiquement cette situation.

b. Où placer une verticale pour partager cette surface en deux parties de même aire ?

25 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe définie par la fonction f donnée sur l'intervalle donné ou par son équation :

a. $f(x)=2$, de 0 à 2

b. $f(x)=2x^2$, de 0 à 5

c. * $4x^2 + 9y^2 = 36$ (ici on demande le volume total de l'ellipsoïde)

26 On fait tourner autour de Ox la région comprise entre les deux courbes données. Calculer le volume du solide obtenu :

a. $y=x^2$ et $y=2x$

b. $y=\sqrt{x}$ et $y=x^3$

27 * Un corps est engendré par la rotation du rectangle $ABCD$ autour de :

a. la droite $x = 9$;

b. la droite $y = -5$;

c. la droite $x + y = 0$.

Déterminer dans chacun de ces cas le volume de ce corps.

28 * Calculer la longueur de la courbe définie par la fonction f définie par $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ entre $x=0$ et $x=5$.

Voir la théorie 9 à 11

Intégration par parties

29 Déterminer :

a. $\int x\cos(2x)\,dx$

b. $\int x^2\sin(x)\,dx$

c. $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$

30 Déterminer l'aire de la surface comprise entre le graphe de $f(x)=\sin^2(x)$, les axes $0x$ et $0y$ et la droite $x = 3$.

31 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,dx$

d. $\int_0^{\pi} (3t^2-4)\cos(t)\,dt$

e. $\int_0^{1} x(1-x)^n\,dx$ ($n\in\mathbb{N}$)

32 * Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3(x)\,dx$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^2(x)\sin(x)\,dx$

h. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\cos^3(x)\,dx$

Voir la théorie 12

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

33 Expliciter les notations et calculer quand c'est possible les sommes suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{5} i$

b. $\sum_{k=2}^{4} k^2$

c. $\sum_{i=0}^{6} 2i$

d. $\sum_{j=1}^{4} (j^2+1)$

e. $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)$

f. $\sum_{j=1}^{4} (2^j+1)$

g. $\sum_{n=1}^{4} (-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)$

h. $\sum_{k=1}^{1000} 2$

i. $\sum_{i=1}^{6} f(x_i)$

34 Écrire à l'aide de la notation sigma :

a. 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + ... + 999

b. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 73

c. $1^2+2^2+3^2+.....+n^2$

d. $0^2+1^2+2^2+.....+(n-1)^2$

35 Exprimer les sommes suivantes à l'aide d'une formule en fonction de n (sans Σ).

a. $\sum_{k=1}^{n} (k^2+3k+5)$

b. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2-2k+1)$

c. $\sum_{k=1}^{n} (k^3+2k^2-k+4)$

36 Soit A l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre les droites $x=a$ et $x=b$. Pour chacune des fonctions f données ci-dessous, calculer des approximations de A en divisant l'intervalle $[a\,;b]$ en 4 sous-intervalles de même longueur :

a. $f(x)=3-x$, a=-2 et b=2.

a. $f(x)=x^2+1$, a=1 et b=3.

37 Représenter graphiquement les aires données par les intégrales suivantes et les calculer.

a. $\int_{-2}^{4} 5\,dx$

b. $\int_{1}^{10} \sqrt{2}\,dx$

38 Déterminer la valeur de l'aire délimitée par l'axe Ox, les droites $x=0$ et $x=3$ et la courbe $y=\frac{x^2}{2}$ en utilisant les sommes de Riemann.

39 Soit A l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre les droites $x=a$ et $x=b$. Pour chacune des fonctions f données ci-dessous, calculer l'intégrale de Riemann avec la définition :

a. $f(x)=2x+3$, a=0 et b=4

b. $f(x)=8-3x$, a=0 et b=2

c. $f(x)=9-x^2$, $a=0$ et $b=3$

d. $f(x)=x^3+1$, $a=0$ et $b=2$

40 À l'aide des propriétés des intégrales, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^4 (3x^2+5)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\int_1^4 (2-9x-4x^2)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_1^4 (6x^2-1)\,\mathrm{d}x$ **d.** $\int_1^4 (3x+2)^2\,\mathrm{d}x$

41 Quel est le nombre c qui satisfait la conclusion du théorème de la moyenne pour l'intégrale donnée, et quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;b]$?

a. $\int_0^3 3x^2\,\mathrm{d}x$ **d.** $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{-4}^{-1} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **e.** $\int_{-2}^{0} \sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{-2}^{1} (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ **f.** $\int_0^5 \sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$

42 Déterminer une primitive pour toutes les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=\frac{5}{3}x^4-\frac{3}{4}x^2+1$

b. $f(x)=(2-x)^{12}$

c. $f(x)=(4x-2)^5$

d. $f(x)=6x(3x^2+1)^2$

e. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

f. $f(x)=6x(1-x^2)^3$

g. $f(x)=2x+1-\frac{1}{x^2}$

h. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

i. $f(x)=-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}$

j. $f(x)=\frac{x^3-3}{x^2}$

k. $f(x)=\frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

l. $f(x)=x\sqrt{x}$

m. $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

n. $f(x)=\sin(3x)$

o. $f(x)=\cos(x)\sqrt{\sin(x)}$

p. $f(x)=1+tg^2(2x)$

q. $f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x)$

r. $f(x)=\sin^5(x)\cos(x)$

s. $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

43 Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a. $\int\left(\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^2}\right)\mathrm{d}z$

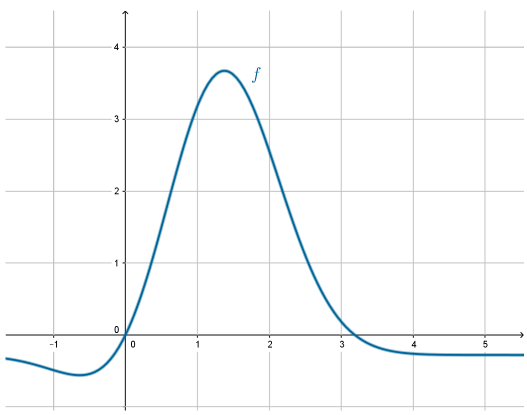
b. $\int \frac{3}{4}\cos(u)\,\mathrm{d}u$

44 Déterminer la primitive F de la fonction f qui contient le point donné :

a. $f(x)=4x^3-2x+3$ contenant le point $(1\,;4)$

b. $f(x)=\sin(x)+\cos(2x)$ contenant le point $\left(\frac{\pi}{2}\,;2\right)$

45 On donne une représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+$ par



$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a. A l'aide du graphique ci-dessus, déterminer $F(0)\,;F(1)\,;F(2)\,;F(3)$.

b. Utiliser également les propriétés des intégrales pour calculer $F(4)\,;F(5)$.

c. Placer ces 6 points dans un repère, esquisser la représentation graphique de la fonction F.

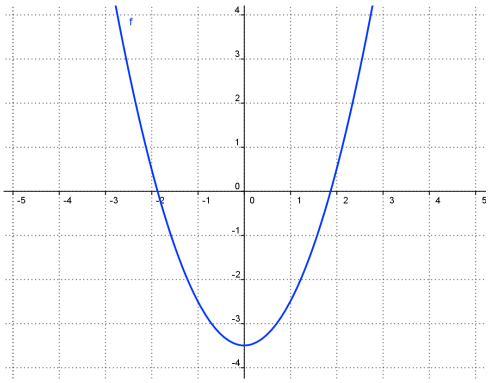
d. Déterminer le tableau des signes de la fonction f.

e. Déterminer le tableau des variations (croissance/décroissance) de F.

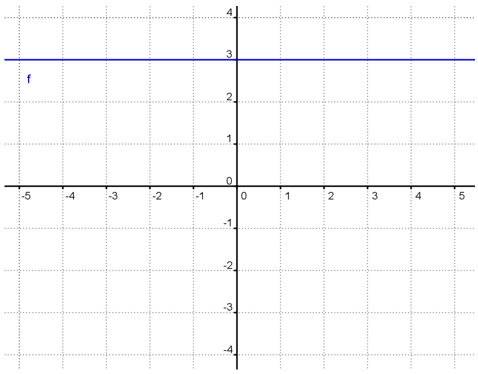
f. Que représente la fonction f pour F ?

46 Tracer sur les graphiques suivants une fonction F dont la dérivée est chaque fois la fonction f représentée :

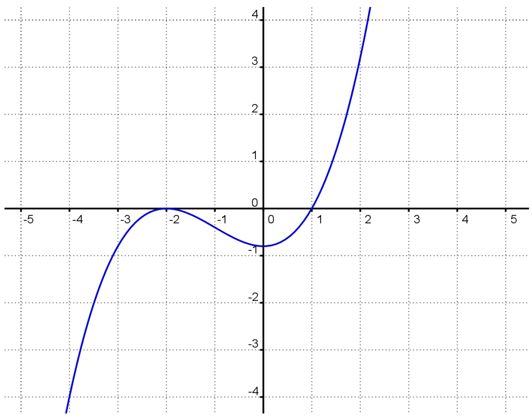
a.



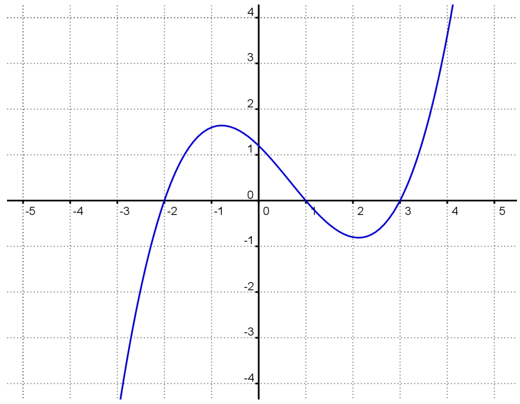
b.



c.



d.



47 On fait tourner autour de Ox la région comprise entre les deux courbes d'équations $y=\frac{x^3}{8}$ et $y=x^2$. Calculer le volume du solide obtenu.

48 * Calculer la longueur de la courbe définie par la fonction $f(x)=\frac{x^4+3}{6x}$ sur l'intervalle donné [1;2].

49 Déterminer la valeur des intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par parties.

a. $\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,\mathrm{dx}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{dx}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{dx}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx}$

e. $\int_0^{3} x\sqrt{1+x}\,\mathrm{dx}$

f. $\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{dx}$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\mathrm{dx}$

«... l'art de vivre ... consiste dans l'expérience intégrale du présent. »
Emil Cioran, philosophe et écrivain roumain (1911-1995)

A savoir en fin de chapitre

Aires et sommes

- ✔ calculs d'aires exactes pour des figures « simples » délimitées par des fonctions connues ;
- ✔ notations $\sum_{...}^{...} ...$;
- ✔ approximations d'aires par calculs d'aires de rectangles ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 8

Intégrale de Riemann

- ✔ petites et grandes sommes de Riemann ; intégrale de Riemann ;
- ✔ relation entre aire et intégrale ;
- ✔ fonctions non intégrables et critère d'intégrabilité ;
- ✔ propriétés de l'intégrale et calculs d'aires avec les propriétés ;

Voir la théorie 4 à 6 et les exercices 9 à 17

Primitives

- ✔ théorème de la moyenne et théorème fondamental I ;
- ✔ notion de primitive ; condition initiale ; approche algébrique et graphique ;
- ✔ méthodes de calcul de primitives ;
- ✔ relation entre toutes les primitives d'une fonction donnée ; interprétation géométrique ;
- ✔ théorème fondamental II (thm de Newton Leibnitz) ;

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 18 à 22

Applications

- ✔ calcul d'aires avec des intégrales ;
- ✔ volumes de révolution : théorème et calculs ;
- ✔ calcul de longueurs d'arc.

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 23 à 28

Intégration par parties

- ✔ calculs d'intégrales et recherche de primitives par parties.

Voir la théorie 12 et les exercices 29 à 32

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-4e/complements/ch01