Ln

Donnée

On considère sur]0;+∞[la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$

Pb

La fonction F définie sur]0;+∞[par $F(x)=\int_1^x \frac{1}{f}\,\mathrm{d}t$ existe, mais

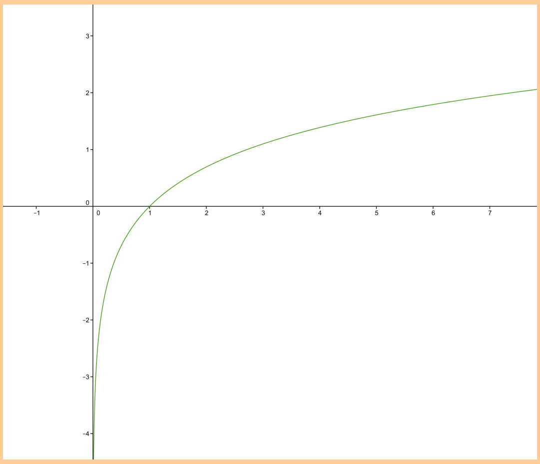
on n'arrive pas à une expression algébrique «calculatoire» ...

justifier !

On adopte une approche graphique qualitative

Idée

On obtient :



La fonction à une « tête de log » !

justifier !

expliquer!

On continue l'exploration : qu'est-ce qu'un log ?

Thm

Théorème : Pour x>0 et y>0 : $F(xy)=F(x)+F(y)$

Théorème : Pour x>0 et y réel : $F(x^y)=yF(x)$

démontrer !

On peut maintenant définir :

Déf

$$ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{array}$$

est appelé **logarithme naturel** ou **logarithme népérien**

Pour effectuer des calculs, on dispose des outils suivants :

Outils

$$[ln(x)]'=\frac{1}{x} \qquad [ln(f(x))]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=ln|x|+c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=ln|f(x)|+c$$

savoir utiliser !

attention à la valeur absolue

Exp

illustrer !

ln est bijective sur]0;+∞[, elle admet donc une réciproque, dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe $y = x$

Déf

$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \to exp(x)$ est la **fonction réciproque de *ln*** on l'appelle **fonction exponentielle**

Quelle est la base de la fonction exp ?

Déf

e est l'unique préimage de 1 par la fonction *ln*
$e \cong 2{,}71$

Thm

démontrer !

Théorème : Pour x réel : $exp(x)=e^x$

exp a-t-elle bien des propriétés exponentielles ?

Thm

Théorème : Pour x,y réels: $exp(x+y)=exp(x)exp(y)$ ou $e^{x+y}=e^x e^{xy}$

Théorème : Pour x,y réels : $exp(xy)=[exp(x)]^y$ ou $e^{xy}=[e^x]^y$

démontrer !

exp a une propriété exceptionnelle !

Thm

démontrer !

Théorème : Pour x réel: $[exp(x)]'=exp(x)$ ou $[e^x]'=e^x$

Pour effectuer des calculs, on dispose des outils suivants :

Outils

$[exp(x)]'=\exp(x)$ ou, autrement écrit : $[e^x]'=e^x$

$[exp(f(x))]'=\exp(f(x))\cdot f'(x)$ ou $[e^{f(x)}]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$\int exp(x)dx=exp(x)$ ou, autrement écrit : $\int e^x dx=e^x$

$\int exp(f(x))\cdot f'(x)dx=exp(f(x))$ ou $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=e^{f(x)}$

savoir utiliser !