

Ln

Donnée

On considère sur $]0; +\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$

Pb

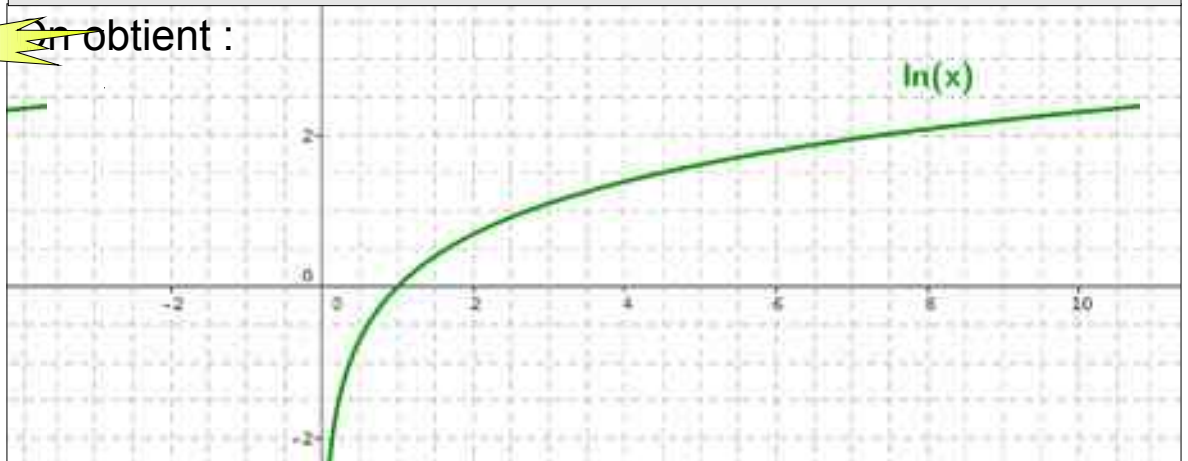
La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ existe, mais on n'arrive pas à une expression algébrique «calculatoire» ...

justifier !

On adopte une approche graphique qualitative

Idée

On obtient :



La fonction à une « tête de log » !

justifier !

expliquer!

On continue l'exploration : qu'est-ce qu'un log ?

Thm

Théorème : Pour $x > 0$ et $y > 0$: $F(xy) = F(x) + F(y)$

démontrer !

Théorème : Pour $x > 0$ et y réel : $F(x^y) = yF(x)$

On peut maintenant définir :

Déf

$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$ln : x \rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt$

est appelé **logarithme naturel**
ou **logarithme népérien**

Pour effectuer des calculs, on dispose des outils suivants :

Outils

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

savoir
utiliser !

attention à la
valeur absolue

Exp

\ln est bijective sur $]0; +\infty[$, elle admet donc une réciproque, dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe $y = x$

illustrer !

Déf

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la fonction réciproque de \ln
 $x \rightarrow \exp(x)$ on l'appelle fonction exponentielle

Quelle est la base de la fonction \exp ?

Déf

e est l'unique préimage de 1 par la fonction \ln
 $e \cong 2,71$

Thm

démontrer !

Théorème : Pour x réel : $\exp(x) = e^x$

\exp a-t-elle bien des propriétés exponentielles ?

Thm

démontrer !

Théorème : Pour x, y réels: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ ou $e^{x+y} = e^x e^y$

Théorème : Pour x, y réels : $\exp(xy) = [\exp(x)]^y$ ou $e^{xy} = [e^x]^y$

\exp a une propriété exceptionnelle !

Thm

démontrer !

Théorème : Pour x réel: $[\exp(x)]' = \exp(x)$ ou $[e^x]' = e^x$

Pour effectuer des calculs, on dispose des outils suivants :

Outils

$[\exp(x)]' = \exp(x)$ ou, autrement écrit : $[e^x]' = e^x$

$[\exp(f(x))]' = \exp(f(x)) \cdot f'(x)$ ou $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$\int \exp(x) dx = \exp(x)$ ou, autrement écrit : $\int e^x dx = e^x$

$\int \exp(f(x)) \cdot f'(x) dx = \exp(f(x))$ ou $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)}$

savoir
utiliser !