Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Démonstration

On écrit : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \cdot \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$

[ARG 1 : ....]

$$= e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

[ARG 2 : ....]

$$= e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$$

[ARG 3 : ....]

Donc : $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \to 0} e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$

[ARG 4 : ....]

Or on sait que : $\ln'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$

[ARG 5 : ....]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

et que : $\ln'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$

[ARG 6 : ....]

d'où : $\ln'(1)=1$

[ARG 7 : ....]

Revenons à $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$

$$=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}}$$

[ARG 8 : ....]

$$=e^1$$

[ARG 9 : ....]

cqfd