a^x : les étapes !

1°/ en 1re :

$x \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} a^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}} & (n \in \mathbb{N}^*) \\ a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1 \quad (\forall a \in \mathbb{R}_*) \end{cases}$$
0^0 ∄

+ Propriétés des puissances avec $n, m \in \mathbb{N}$
$$a^n \cdot a^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n+m}$$
$$(a^n)^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n \cdot m}$$
$$\frac{a^n}{a^m} \overset{\text{thm}}{=} a^{n-m}$$

$x \in \mathbb{Z}$:
$$\left\{ a^{-n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{a^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \right.$$

+ Extension des propriétés pour $n, m \in \mathbb{Z}$

2°/ en 2e

$x \in \mathbb{Q}$:
$$\begin{cases} a^{1/2} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{a} & (\forall a \geq 0) \\ a^{1/n} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt[n]{a} & (⚠ \text{ selon parité de } n,\ a \geq 0) \\ a^{m/n} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \end{cases}$$

+ Extension des propriétés pour $m, n \in \mathbb{Q}$

3°/ en 2e

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$$
$$x \mapsto a^x$$
bijective

↳ $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \log_a(x)$ réciproque

⚠ pb : a^x pas défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4°/ en 4e

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \overset{\text{def}}{=} \ln(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

thm fond $\int$: f existe + propriétés → bijective

$\ln(xy) \overset{\text{thm}}{=} \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ✓

$\ln(x^y) \overset{\text{thm}}{=} y \ln(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall y \in \underline{\underline{\mathbb{Q}}}$ ⚠

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \ln^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} \exp(x) \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$$

$e \overset{\text{def}}{=} \ln^{-1}(1)$

$\exp(x) \overset{\text{thm}}{=} e^x$: dém ok $\underline{\forall x \in \mathbb{Q}}$

propr. exp : $\exp(xy) \overset{\text{thm}}{=} \exp(x)\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x^y) = y \exp(x) \quad \forall x \in \underline{\mathbb{Q}}$

$\exp'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \ln a) \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$ (idem $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad \text{bij}$$
$$x \mapsto a^x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a(x) \quad \text{réciproque}$$

On peut reprendre la démonstration de :

$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

$\exp(x) = e^x$

$\exp(x^y) = y \exp(x)$

démos idem mais ok $\forall y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$