Chapitre 3 : Algèbre linéaire – à savoir

voir https://edugemath.ch/4e/ch3-alglin

Définition

Une **application** $L:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est **linéaire** si et seulement si $L(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha L(\vec{v})+\beta L(\vec{w}),\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\forall\,\vec{v}$ et $\vec{w}\in\mathbb{R}^2$.

Théorème « Tester la non linéarité »

Si L est une application linéaire, alors $L(\vec{O})=\vec{O}$
Si L est une application telle que $L(\vec{O})\neq\vec{O}$, alors L n'est pas linéaire.

Théorème « Linéarité des transformations de base »

Les translations ne sont pas linéaires.
Les homothéties et rotations dont le centre n'est pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les homothéties et rotations dont le centre est l'origine sont linéaires.
Les symétries dont l'axe ne contient pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les symétries dont l'axe contient origine sont linéaires.
Les projections sur un axe qui ne contient pas l'origine ne sont pas linéaires.
Les projections sur un axe qui contient l'origine sont linéaires.

Théorème « Une AL est entièrement déterminée par deux images »

Une application linéaire $\boldsymbol{L}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ est entièrement définie par les images des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Autrement dit : Si L est une application linéaire et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les deux vecteurs de la base canonique, alors $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\cdot L(\vec{i})+y\cdot L(\vec{j})$

Théorème « Matrice d'une application linéaire »

Si L est une application linéaire telle que $L(\vec{i})=\begin{pmatrix}i_1\\i_2\end{pmatrix}$ et $L(\vec{j})=\begin{pmatrix}j_1\\j_2\end{pmatrix}$, alors $L(\vec{v})=\begin{pmatrix}i_1 & j_1\\i_2 & j_2\end{pmatrix}\cdot\vec{v}$

$\begin{pmatrix}i_1 & j_1\\i_2 & j_2\end{pmatrix}$ est appelée **matrice de L (relativement à la base canonique)**

Matrices particulières

La matrice d'une homothétie $H:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ de centre O et de rapport r est $M_H=\begin{pmatrix}r & 0\\0 & r\end{pmatrix}$

La matrice d'une rotation $R:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ de centre O et d'angle α est $M_R=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ d'axe Ox est $M_S=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ d'axe Oy est $M_S=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ d'axe $y=x$ est $M_S=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ d'axe $y=-x$ est $M_S=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

La matrice d'une symétrie $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe $y=kx$ faisant un angle θ avec l'axe Ox est

$$M_S = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

La matrice d'une projection $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe Ox est $M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe Oy est $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe $y=x$ est $M_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La matrice d'une projection $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe $y=-x$ est $M_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Théorème « Composition de deux applications linéaires »

Soit $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires telles que $F \circ L$ existe. Alors $F \circ L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est aussi une application linéaire.

Théorème « Matrice de la composition de deux applications linéaires »

Soit $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires telles que $F \circ L$ existe et soient M_L et M_F leurs matrices respectives relativement à la base canonique. Alors on a $M_{F \circ L} = M_F \cdot M_L$

Théorème « Réciproque d'une application linéaire »

Soit $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que sa réciproque L^r existe.
Alors $L^r:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est aussi une application linéaire

Théorème « Matrice de la réciproque d'une application linéaire »

Soit $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que sa réciproque L^r existe et soit $M = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}$ la matrice de L relativement à la base canonique. Alors la matrice de L^r est l'inverse de la matrice de L, c'est-à-dire que $L^r \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$