MaLUN Chapitre 4 Corrigé des exercices

ex 1

$M_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{1\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$M_{4\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{2\times2} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}7 \\ 3{,}33 & 1/4 \end{pmatrix}$

ex 2

a) $D+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

b) $D+I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $B+A \nexists$

d) $O+D = D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $C+D \nexists$

f) $2B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

g) $-3D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

h) $\sqrt{2}\, I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

i) $2E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

j) $-F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

k) $4D - B + O = 4D+B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$

ex 4

a) $BA = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

b) $AB \nexists$

c) $BD = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

d) $DB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$

e) $DA = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $AO \nexists$

g) $DI = D$

h) $I^3 = I$

i) $DIB = DB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$

j) $AC = \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$

k) $CA = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & 23 & 14 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

l) $I^{2345} = I$

m) $CB = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 17 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

n) $ACB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 17 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 68 \\ 15 & -11 \end{pmatrix}$

o) $OIBDBDD = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ex3

	nord	sud
nord	0,95	0,05
sud	0,02	0,98

$P_N + P_S = 70$

a) $S = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

b) $P_n = \begin{pmatrix} P_N \\ P_S \end{pmatrix}_{2\times 1}$

c) $P'_N = 0{,}95 P_N + 0{,}02 P_S$
$P'_S = 0{,}05 P_N + 0{,}98 P_S$

d) Equilibre $\Leftrightarrow \begin{cases} P_N' = P_N \\ P_S' = P_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}95 P_N + 0{,}02 P_S = P_N \\ 0{,}05 P_n + 0{,}98 P_S = P_S \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}95 P_N + 0{,}02 P_S = P_N \\ 0{,}05 P_N + 0{,}98 P_S = P_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}02 P_S = 0{,}05 P_n \\ 0{,}05 P_N = 0{,}02 P_S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 P_S = 5 P_N \\ 5 P_N = 2 P_S \end{cases}$ idem

on a donc : $\begin{cases} ① \; 2 P_S = 5 P_N \\ \text{et } ② \; P_N + P_S = 70 \end{cases}$: ① $P_S = 2{,}5 P_N$, dans

dans ② $P_N + 2{,}5 P_N = 70$

$\Leftrightarrow 3{,}5 P_N = 70$

$\Leftrightarrow P_N = \frac{70}{3{,}5} = 20$ mio

et donc $P_S = 50$ mio

f) Pour obtenir les bons résultats, il faut transformer un peu S (transposée..)

$S^t = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix}$ et alors on peut utiliser la <u>multiplication matricielle</u>

$S^t \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}98 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} P_N \\ P_S \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 0{,}95 P_N + 0{,}02 P_S \\ 0{,}05 P_N + 0{,}98 P_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_N' \\ P_S' \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}95 P_N + 0{,}02 P_S = P_N' \\ 0{,}05 P_N + 0{,}98 P_S = P_S' \end{cases}$

g) $S^t \cdot P = P$

ex 5 AB existe $\Leftrightarrow$ $A_{n\times m} \cdot B_{p\times q}$ avec $m=p$

et BA existe $B_{p\times q} \cdot A_{n\times m}$ avec $q=n$

$\Leftrightarrow A_{n\times m} \cdot B_{m\times n}$

donc les matrices peuvent ne pas être carrées

c-exple : $A=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

$$A_{2\times 1} \cdot B_{1\times 2} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times 1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 2} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2\end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B_{1\times 2} \cdot A_{2\times 1} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times 1} = (1\cdot 3 + 2\cdot 1)_{1\times 1} = (5)$$

la conjecture est donc fausse

ex 6 $(A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix}1 & -6\\ 22 & 22\end{pmatrix}$

$A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix}1 & -6\\ 22 & 22\end{pmatrix}$

ex 7 a) $A^2 = \begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos^2(2a) + \sin^2(2a) & 2\cos(2a)\sin(2a)\\ 2\sin(2a)\cos(2a) & \sin^2(2a) + \cos^2(2a)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \sin(4a)\\ \sin(4a) & 1\end{pmatrix}$$

car $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

et $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

b) $B^3 = \ldots = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

c) $C^2 = \ldots = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$