ex12

a) $\det(A) = 1\cdot 1 - 1(-1) = 2$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\det A = 1$

$A^{-1} = A$

c) $\det A = 0$

$A^{-1} \nexists$

d) $\det A = -2$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

e) $\det A = -1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

ex13

$A^{-1} \nexists \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow 2a\cdot a - (-3)a = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a(2a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 3/2$

ex14

a) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -3x - 2y = 4 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$AS = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det A = -4 + 15 = 11$

$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $A^{-1}AS = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow S = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2-20 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -18 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -18/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$

Solution : $\left\{\left(-\frac{18}{11} ; \frac{5}{11}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} -3x + 6y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det A = -12 - (-12) = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \nexists$!

On ne peut pas résoudre ce système avec cette méthode

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$ il s'agit des équations de deux droites parallèles !

donc $S = \emptyset$

ex15b Exemple de calcul à la main de l'inverse d'une matrice 3x3

$$F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) $$\det(F) = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot(2\cdot 1 - 0(-1)) - 0\cdot(\dots) + 3\,((-1)(-1) - 2\cdot 2)$$
$$= -7$$

ii) $$B=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iii) $$B^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

iv) $$F^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & 5/7 & -1/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

Vérification : $$F\cdot F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & 5/7 & -1/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et idem $F^{-1}\cdot F = I$

ex15a

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(5-1) - 0 + 2(-1-3)$$
$$= 8 - 8 = 0$$

donc $B^{-1} \nexists$

ex 16

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est la matrice F de l'ex 15b !

donc $A^{-1} = F^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 & +3 \\ +3 & +5 & -1 \\ +6 & +3 & -2 \end{pmatrix}$

on pose encore $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on a : $AS = B \Leftrightarrow S = A^{-1} \cdot B$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 & +3 \\ +3 & +5 & -1 \\ +6 & +3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} +4 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ -1/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$

la solution du système est : $S = \left\{\left(-\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)\right\}$

ex 17

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(AB) = (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt)$

$= \cancel{axcy} + bzcy + axdt + \cancel{bzdt} - \cancel{cxay} - dzay - cxbt - \cancel{dzbt}$

or $\det A \cdot \det B = (ad-bc)(xt-yz) = adxt - bcxt - adyz + bcyz$

c'est bien égal !

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: c'est vrai

c) AB existe $\Leftrightarrow A_{n\times m}$ et $B_{m\times p}$

alors $AB_{n\times p}$ pas forcément carrée : c'est faux

contre-exple : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

d) $A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = B_{m\times p} \cdot A_{n\times m} \Leftrightarrow p = n = m$

mais pas forcément diagonales :

contre-exple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ [cf ex 10...]

e) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on a : $AB = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & -c+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ d = a \end{cases}$

càd $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$: c'est vrai !

f) $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: on veut $AB=\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 16 & 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}AB=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow B=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$; donc

B existe $\Leftrightarrow$ A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow 11\cdot 13-15\cdot 17 \neq 0$

c'est le cas, donc B existe (pas demandé de la déterminer !)

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{pmatrix}$ inv $\Leftrightarrow \det(A)=16-\alpha^2\neq 0$

faux si $\alpha=\pm 4$

h) $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ inversible $\Rightarrow ad\neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est aussi inversible, car $da\neq 0$

i) $AB=A \Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}A \Rightarrow IB=I \Rightarrow B=I$

vrai