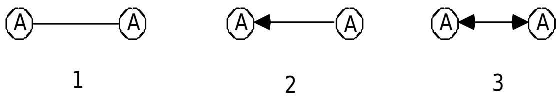
Applications du calcul matriciel
Exercices supplémentaires

1. Réseau

   Un réseau est constitué d'un ensemble de nœuds et d'un ensemble de chemins qui assurent la liaison entre les nœuds. Les nœuds peuvent représenter des villes, des intersections de routes, des ordinateurs, des réservoirs d'eau, ou des délais dans un projet. Les nœuds représentent donc des points où un flux prend son origine, se termine ou se trouve relayé. Les chemins peuvent représenter des routes, des voies aériennes, des lignes à haute tension, des oléoducs etc.
   Ci-dessous sont illustrées différentes représentations de nœuds et de chemins.

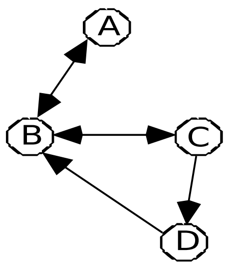


   Dans le cas 1 il s'agit d'un chemin non-orienté.

   Dans le cas 2 il s'agit d'un chemin orienté.

   Dans le cas 3 il s'agit d'un chemin bi-orienté.

   Ci-dessous se trouve un exemple de nœuds et de chemins représentant les voies aériennes empruntées par une compagnie d'aviation locale desservant quatre villes A, B, C et D.



   Les nœuds représentent les villes et les chemins les voies aériennes.

   Le chemin bidirectionnel qui relie les nœuds A et B indique que la compagnie assure les vols de A vers B mais également de B vers A.

   L'essentiel de ces relations peut être représenté par une matrice.

   Chaque ligne et colonne de la matrice représente les nœuds du réseau. Les éléments de la matrice sont représentés par des 0 ou des 1 en fonction des chemins qui relient les nœuds Explicitement l'élément dans la position ij se verra assigné le nombre 1 si une liaison aérienne est assuré entre la ville i et la ville j, sinon on lui assignera le nombre 0.

La matrice ci-dessous représente tous les vols non interrompus entre les villes desservies par la compagnie aérienne:

$$\begin{array}{cc} & \textit{à} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \textit{de} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice M ci-dessus est de dimension 4x4; en la multipliant par elle-même d'une certaine façon, on obtient une matrice qui résume le nombre de vols à un arrêt entre toutes les villes.

On obtient le résultat suivant:

$$\begin{array}{cc} & \textit{à} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \textit{de} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Vérifier sur les schémas ci-dessus si les résultats sont cohérents.

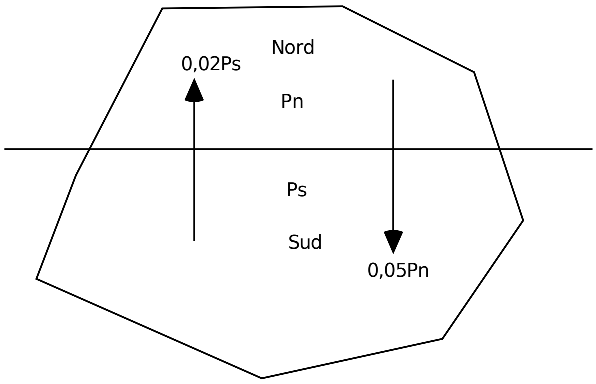
b) Et si on multipliait ce résultat encore une fois par la matrice M, comment pourrait-on interpréter les résultats obtenus ?

2. Migration des populations

Les matrices peuvent servir à représenter les déplacements de personnes ou d'animaux d'une région à une autre. On utilisera à cette fin une matrice dite de transition qui décrit en pourcentage la transition d'une région à une autre et une matrice dit de population qui indique la répartition de la population par rapport à chacune des régions concernées. Si les schémas de transition ne varient pas au cours du temps (ce qui veut dire que la matrice de transition est constante) alors on peut considérer qu'une situation d'équilibre est atteinte lorsque la population de chaque région reste stable. Lorsque la situation d'équilibre est atteinte, on peut se rendre compte qu'une augmentation de la population dans une région donnée est compensée par une diminution de cette même population durant la période considérée.

Imaginer que le coût de l'énergie dans le nord d'un pays d'Europe augmente et semble être la cause d'une migration de la population du nord vers le sud du pays selon les proportions indiquées voir le schéma ci-dessous.

Soit P_n la population au nord du pays pour une année donnée et P_s la population au sud du pays pour la même année.



Le tableau suivant est représentatif de la situation décrite ci-dessus

direction du nord	direction du sud	
0,95	0,05	en venant du nord
0,02	0,98	en venant du sud

Le nombre 0,95 dans le tableau indique que 95 pour cents de ceux qui habitent le nord durant une année habiterons encore au nord l'année suivante. Le nombre 0,05 représentent les 5 pour-cent restants qui migreraient du nord au sud l'année suivante.

Le nombre 0,98 dans le tableau indique que 98 pour-cent de ceux qui habitent le sud durant une année habiterons encore au sud l'année suivante. Le nombre 0,02 représentent les 2 pour-cent restants qui migreraient du sud au nord l'année suivante.

Pour simplifier la suite de la discussion, on supposera que les paramètres 0,95 et 0,98 reflètent l'effet global dû aux naissances, décès, immigration et émigration au cours de l'année.

Supposons de plus que la population est de 70 millions ou en d'autres termes que

$$P_n + P_s = 70$$

a) Trouver une matrice S pour transcrire les informations dans le tableau ci-dessus

b) Trouver une matrice P pour décrire la population du pays.

c) A l'aide d'une formule déterminer la population P'_n au nord et P'_s au sud du pays l'année suivante.

L'équilibre est atteint lorsque $P_n = P'_n$ et $P_s = P'_s$.

d) Montrer que la population est stable si les conditions suivantes sont réalisées:

$$0,95 P_n + 0,02 P_n = P_n$$

$$0,05 P_n + 0,98 P_s = P_s$$

e) Déterminer P_n et P_s de telle sorte que la population soit stable.

f) Imaginer une opération entre matrices qui permet de répondre à la question c).

g) En utilisant l'opération déterminée ci-dessus entre matrices, déterminer une condition pour décrire l'équilibre de la population.