Théorème de la variance

Si X est une variable aléatoire, alors $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

Démonstration :

Représentons cette situation ainsi : $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f_X} [0;1]$

$\omega \rightarrow x \rightarrow p$

avec

X :

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
$f_X(x)=p(X=x)=p$	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

d'où : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, car [ARG 1 : déf espérance d'une v.a.]

Posons $E(X)=\mu$ pour simplifier l'écriture.

On a : $V(X)=E((X-\mu)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot p_i$, car

[ARG 2 : déf variance d'une v.a.]

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\cdot\mu\cdot x_i+\mu^2)\cdot p_i \text{ , car}$$

[ARG 3 : développement ou id.rem 2]

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot p_i-2\cdot\mu\cdot x_i\cdot p_i+\mu^2\cdot p_i \text{ , car}$$

[ARG 4 : distributivité]

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \mu \cdot x_i \cdot p_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 \cdot p_i \text{ , car}$$

$\Big($ [ARG 5 : propriété de la somme] *argument non attendu* $\Big)$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + \mu^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ , car}$$

[ARG 6 : mise en évidence]

$$=E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot E(X) + \mu^2 \cdot 1 \text{ , car}$$

[ARG 7.1 :déf espérance de X^2]

[ARG 7.2 : déf espérance de X]

[ARG 7.3 : Axiome d'une loi de probabilité]

$$=E(X^2) - 2 \cdot \mu^2 + \mu^2 \text{ , car}$$

[ARG 8 : notation $E(X)=\mu$, ou substitution]

$$=E(X^2) - \mu^2$$

cqfd