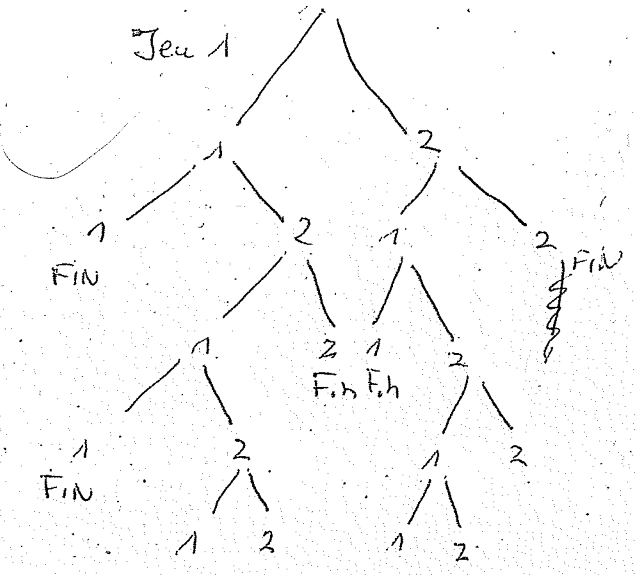
Ch 4 Activités - Corrigé

Acti 1 1.

Jeu 1



10 parties différentes

2. $10 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 9 = 3960$ cf "arbre"

choix 1er ...

3. a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

b) $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

choix du dernier !!! [2 ou 6]

c) $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

choix du 1er !!! [2 ou 3]

d) $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$

choix du dernier [5]

e) → a') $6 \cdot 6 \cdot 6$

b') $2 \cdot 6 \cdot 6$

c') $2 \cdot 6 \cdot 6$

d') $1 \cdot 6 \cdot 6$

4. a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

b) $\frac{6!}{2} = 360$ ← groupe de 2 mots identiques à cause des 2 "E"

c) $\frac{6!}{3!} = 120$

5. $P_{8;4,3,1} = \frac{8!}{4!3!1!} = 280$

6. a) $C_6^{20} = 38760$

b) $C_6^{9} = 84$

c) $C_6^{20} - C_6^{9} - C_6^{11} = 38214$

Act $\boxed{1.7}$ a) $C_9^{36}\; C_1^4 \cdot C_9^{27} \cdot C_1^3 \cdot C_9^{18} \cdot C_1^2 \cdot C_5^8 \cdot C_1^1$

on fait des choix de 9 cartes parmi ...

on choisit le joueur à qui donner le tas

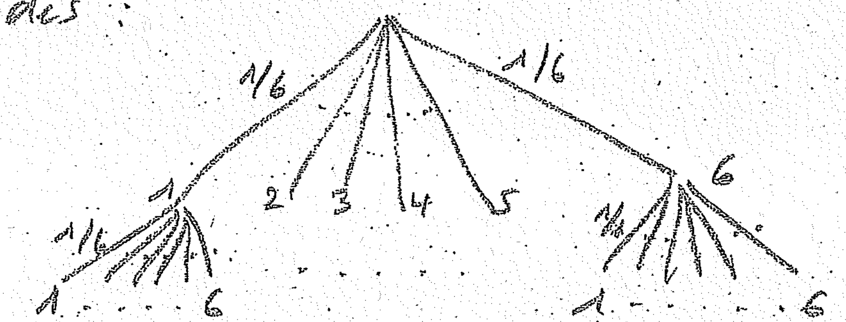
b) $1 \cdot 4 \cdot C_5^{32} \cdot \underbrace{C_9^{27} \cdot C_9^{18} \cdot C_9^9 \cdot 3!}_{\text{les autres cartes}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{18} \approx 92\%$

on prend les 4 valets — on choisit le joueur — on lui donne 5 autres cartes

Act 2.1

i) On jette deux dés :

le résultat dépend du hasard ...



ii) événements élémentaires : $E_1 = \{1;1\}$

$E_2 = \{1;2\}$

$E_3 = \{1;3\}$

$\vdots$

$E_7 = \{2;1\}$

$\vdots$

$E_{36} = \{6;6\}$ $\qquad p(E_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

pour tout $i \in \{1;2;\ldots;36\}$

iii) $\#\Omega = \#\{E_1;\ldots;E_{36}\} = 36$

Act 2.2

Ax1 : $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$

Ax2 : $P(\Omega) = 1$

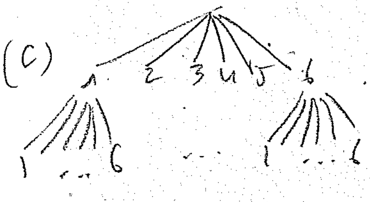
Ax3 : Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(a) $\frac{1}{2}$ P / $\frac{1}{2}$ F — intuition + stats

Ax1 (✓)
2 ✓
3 (✓)

(b) $\frac{1}{4}$ P / $\frac{3}{4}$ F → obligatoire pour avoir un modèle probabiliste

(c)



(cf. Act 6 3e)

$P(\text{"2 puis 3"}) = \frac{1}{36}$

$P(\text{"2 et 3"}) = \frac{2}{36}$

⋮

Ax1 (✓)
Ax2 ✓
Ax3 (✓)

(d) ex (a) / (c)

(e) ex (b)

Théorèmes de probabilité

Théorème 1

Soit Ω un univers et p une probabilité sur Ω, alors on a $p(\varnothing)=0$

Illustrer par un exemple concret :

on jette un dé non truqué à 6 faces

A = "obtenir 7" $= \varnothing$

$p(A) = 0$

Démonstration :

Idée : on écrit $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ (et on a $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$)

d'où : $p(\Omega) = p(\Omega \cup \varnothing)$

$= p(\Omega) + p(\varnothing)$, car [1 : Ax 3, car $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$]

c'est-à-dire : $p(\Omega) - p(\Omega) = p(\varnothing)$, car [2 : $-p(\Omega)$]

et enfin : $0 = p(\varnothing)$

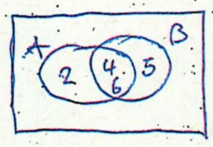
cqfd

Act 2.3

Théorème 2

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A et B deux événements aléatoires quelconques de Ω, alors on a : $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$

Illustrer par un exemple concret :



on jette un dé non truqué à 6 faces

A = obtenir un chiffre pair $= \{2;4;6\}$

B = " " " $\geqslant 4 = \{4;5;6\}$

$A \cap \overline{B} = \{2\}$

$A \cap B = \{4;6\}$

$p(A\cap\overline{B}) \stackrel{?}{=} p(A) - p(A\cap B)$

$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ ✓

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω, A, B et $A\cap\overline{B}$

Idée : on écrit $A = (A\cap\overline{B}) \cup (A\cap B)$

et on observe que $(A\cap\overline{B}) \cap (A\cap B) = \varnothing$

d'où : $p(A) = p(A\cap\overline{B}) + p(A\cap B)$, car [1 : Ax 3]

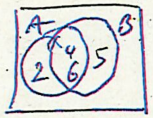
c'est-à-dire : $p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A\cap B)$, car [2 : $-p(A\cap B)$]

cqfd

Théorème 3

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A et B deux événements aléatoires quelconques de Ω, alors on a $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Illustrer par un exemple concret : on jette un dé à 6 faces, non truqué



$A=\{2;4;6\}$
$B=\{4;5;6\}$
(comme thm 2)

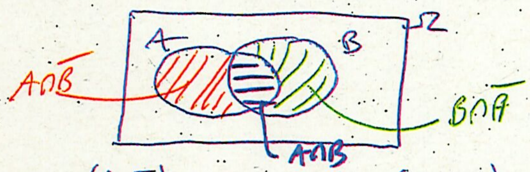
$A\cup B=\{2;4;5;6\}$
$A\cap B=\{4;6\}$

$p(A\cup B)\overset{?}{=}p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$\frac{4}{6}\ \overset{?}{=}\ \frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{2}$ ✓

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω, A, B et $A\cap\overline{B}$, $A\cap B$ et $B\cap\overline{A}$



Idée : on écrit $A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup(B\cap\overline{A})$

et on observe que $(A\cap\overline{B})$, $(A\cap B)$ et $(B\cap\overline{A})$ sont tous disjoints

d'où : $p(A\cup B)=p(A\cap\overline{B})+p(A\cap B)+p(B\cap\overline{A})$, car [1 : Ax 2]

$=p(A)-p(A\cap B)+p(\cancel{A\cap B})+p(B)-p(\cancel{B\cap A})$, car [2 : Thm 2]

(car $A\cap B=B\cap A$)

$=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

cqfd

Théorème 4

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A un événement aléatoire quelconque de Ω, alors on a $p(\overline{A})=1-p(A)$

Illustrer par un exemple concret : on jette un dé non truqué à 6 faces.

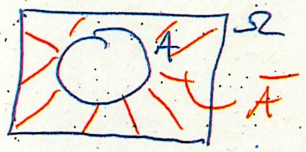
$A=$ obtenir un chiffre pair $=\{2;4;6\}$
$\overline{A}=$ " " " impair $=\{1;3;5\}$

$p(\overline{A})\overset{?}{=}1-p(A)$

$\frac{3}{6}\ \overset{?}{=}\ 1-\frac{3}{6}$ ✓

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω, A et $\overline{A}$



Idée : on a $A\cup\overline{A}=\Omega$ et $A\cap\overline{A}=\emptyset$

d'où : $p(A\cup\overline{A})=p(\Omega)$, car [1 : voir plus haut]

$\Leftrightarrow\ p(A)+p(\overline{A})=p(\Omega)$, car [2 : Ax 2]

$\Leftrightarrow\ p(A)+p(\overline{A})=1$, car [3 : Ax 2]

$\Leftrightarrow\ p(\overline{A})=1-p(A)$, car [4 : $-p(A)$]

cqfd

Act 2.4

on a : $\left.\begin{array}{l} p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \\ p_5 = p_6 = p_7 = 2p_1 \end{array}\right\}$ (*)

et aussi : $p_1 + p_2 + \dots + p_7 = 1$

donc $4p_1 + 3p_5 = 1$ [car (*)]

$\Leftrightarrow 4p_1 + 3(2p_1) = 1$ [car $p_5 = 2p_1$]

$\Leftrightarrow 10p_1 = 1$

$\Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{10}$

donc $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{10}$ et $p_5 = p_6 = p_7 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

a) $p(\text{"6"}) = p_6 = \frac{1}{5} = 20\%$

b) $p(\text{"pair"}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$

c) $p(\text{"}\leq 6\text{"}) = 1 - p(\text{"7"}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 80\%$

d) $p(\text{"pair et} \leq 6\text{"}) = p(\text{"pair"} \cap \text{"}\leq 6\text{"}) = p(\text{"2;4;6"}) = \dots = \frac{4}{10}$

$= 40\%$

e) $p(\text{"pair ou} \leq 6\text{"}) = p(\text{"pair"} \cup \text{"}\leq 6\text{"})$

ou

$= p(\text{"1;2;3;4;5;6"})$

$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10}$

$= \frac{8}{10} = 80\%$

$= p(\text{"pair"}) + p(\text{"}\leq 6\text{"}) - p(\text{"pair"} \cap \text{"}\leq 6\text{"})$

$= \frac{4}{10} + \frac{8}{10} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = 80\%$

Ac 2.5

a) $E = \{$au moins 1 P$\} = \{\#P \geq 1\}$

$\bar{E} =$ aucun P

$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$

b) $F = \{\#P \geq 2\}$

$\bar{F} = \{\#P = 0$ ou $\#P = 1\}$

$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \frac{1}{2}\right]$

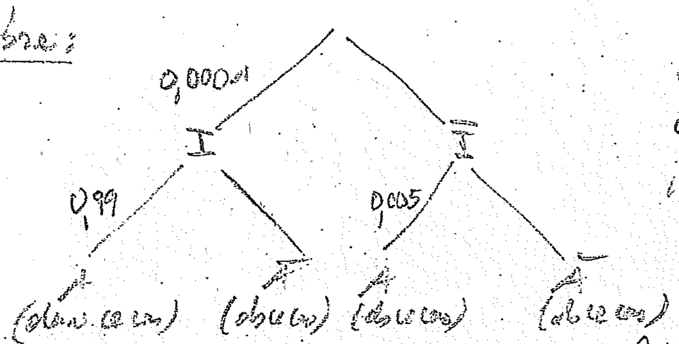
c) $G = \{\#P = 4\}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-4}$: une façon possible $\rightarrow$ PPPPFFF...F

toutes les façons : $C_4^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8$

Act 2 b

Premier arbre :



on donne des probabilités associées à cet arbre dans l'énoncé

on peut en déduire d'autres probabilités directement liées à l'arbre :

E_1 = "il n'y a pas d'incendie"

$P(E_1) = 1 - P(\bar{E_1}) = 1 - P(\text{"il y a incendie"}) = 1 - 0,0001 = 0,9999$

E_2 = "l'alarme ne sonne pas alors qu'il y a un incendie"
= "l'alarme ne sonne pas sachant qu'il y a un incendie"

$P(E_2) = 1 - P(\bar{E_2}) = 1 - P(\text{"l'alarme sonne sachant qu'il y a un incendie"})$
$= 1 - 0,99 = 0,01$

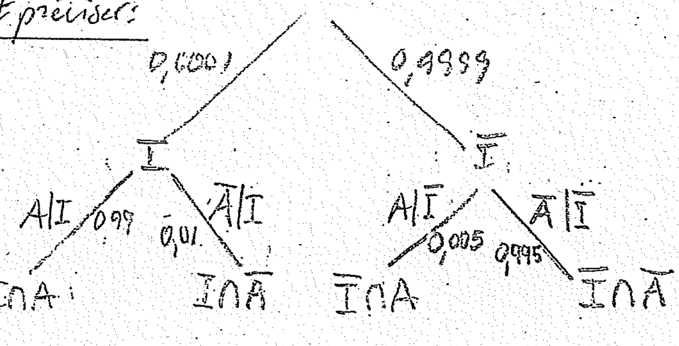
on note $E_2 = \bar{A}/I$ et $P(\bar{A}/I) = 0,01$
sachant que...

de même : E_3 = "l'alarme ne sonne pas sachant qu'il n'y a pas d'incendie"
$= \bar{A}/\bar{I}$

$P(\bar{A}/\bar{I}) = 1 - P(A/\bar{I}) = 1 - 0,005 = 0,995$

on peut aussi compléter l'arbre et préciser :

nouvelle notation →



et répondre à de nouvelles questions :

E = il y a un incendie et l'alarme sonne = l'alarme sonne et il y a un incendie

$P(E) = 0,0001 \cdot 0,99 = 9,9 \cdot 10^{-5} = 0,000099 = 0,0099\,\%$

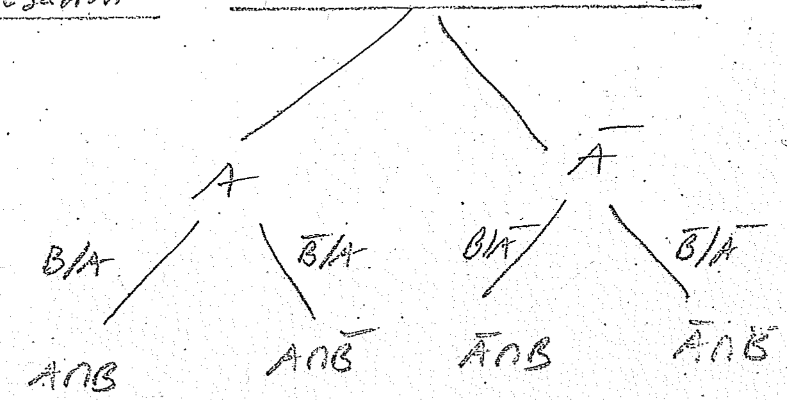
F = il n'y a pas d'incendie et l'alarme ne sonne pas = l'alarme ne sonne pas et il n'y a pas d'incendie

$P(F) = 0,9999 \cdot 0,995 = 0,9949005 \simeq 99,5\,\%$

mais aussi A = "l'alarme sonne (qu'il y ait incendie ou pas)"

$P(A) = 0,0001 \cdot 0,99 + 0,9999 \cdot 0,005 = 0,0050985 \simeq 0,5\,\%$

<u>Généralisation</u> <u>Probabilité conditionnelle</u>



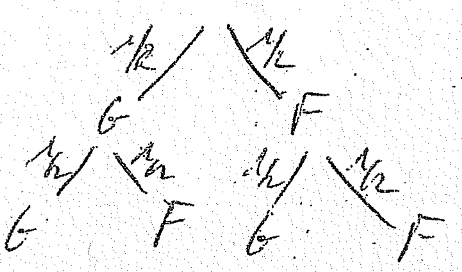
$$p(A)\cdot p(B|A) = p(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow \left[p(B|A) \overset{\text{déf}}{=} \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \right]$$

probabilité que A se réalise <u>sachant que</u> A s'est réalisé

Act 2.7
Indépendance ...

① Pour la famille Robert :



A : "avoir des enfants des 2 sexes" : GF / FG

$\Rightarrow p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

B : "avoir au plus un garçon" : FF / GF / FG

$\Rightarrow p(B) = \frac{3}{4}$

$A \cap B$: "avoir des enf des 2 sexes et au plus un garçon" : GF / FG

$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Comme $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, on a pu A et B sont dépendants

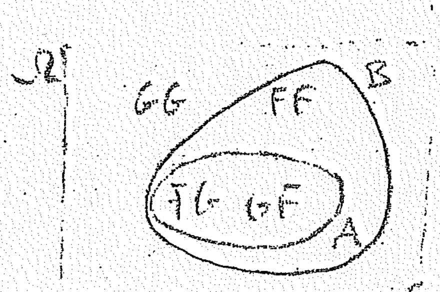
Autrement : • $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \neq P(A)$

$\Rightarrow$ donc le fait que B soit réalisé modifie la probabilité que A le soit aussi !

• $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \neq P(B)$

$\Rightarrow$ Si A est réalisé, B l'est forcément ! Donc il y a dépendance

De façon ensembliste



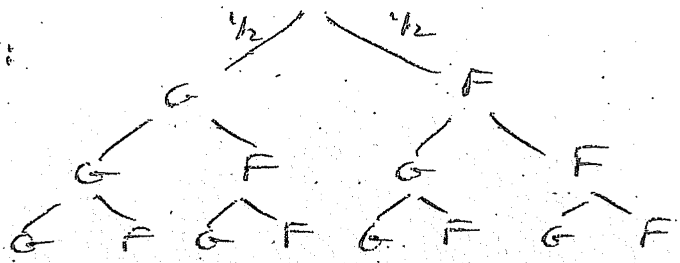
tous équiprobables

⚠ de ne pas confondre :
événements disjoints (ou incompatibles), càd $A \cap B = \emptyset$, et alors $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

et

événements indépendants càd $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pour la famille Roulet :



A : tout sauf GGG et FFF $\Rightarrow p(A) = 6/8 = 3/4$

B : FFF / FFG / FGF / GFF $\Rightarrow p(B) = 4/8 = 1/2$

$A \cap B$: FFG / FGF / GFF $\Rightarrow p(A \cap B) = 3/8$

Comme $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, car $\frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$,

on a que A et B sont indépendants

Autrement :

- $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{3/8}{1/2} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{3}{4} = P(A)$

le fait que B soit réalisé ne modifie pas la probabilité que A le soit : dans le nouvel univers $\Omega_B = \{FFF; FFG; FGF; GFF\}$, la probabilité d'avoir des enfants des deux sexes reste $\frac{3}{4}$

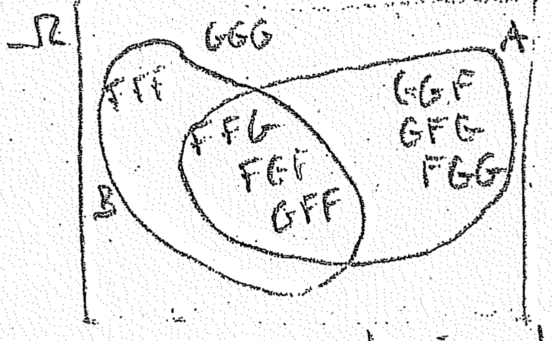
- $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{3/8}{3/4} = \dfrac{1}{2} = P(B)$: idem

$\Omega_A = \{FFG, FGF, GFF, FGG, GFG, GGF\}$

dans cet univers, la prob. d'avoir au moins un garçon vaut $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ les événements sont bien indépendants !

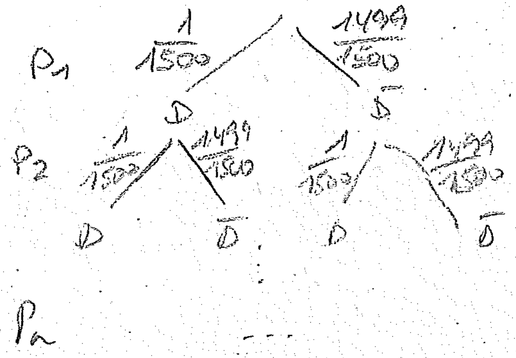
De façon ensembliste :



tous équiprobables

Act 2.8

E = "au moins..." $\longrightarrow$ $\overline{E}$ = "aucun daltonien" parmi n personnes



$$p(\overline{E}) = \frac{1499}{1500} \cdot \frac{1499}{1500} \cdot \ldots \cdot \frac{1499}{1500} = \left(\frac{1499}{1500}\right)^n$$

et donc : $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{1499}{1500}\right)^n$

On veut $P(E) \geq 0{,}95 \iff 1 - \left(\frac{1499}{1500}\right)^n \geq 0{,}95$

$$\iff 0{,}05 \geq \left(\frac{1499}{1500}\right)^n \quad \text{inéq. exponentielle !}$$

$$\iff \log(0{,}05) \geq \log\left(\frac{1499}{1500}\right)^n \quad [\text{car log est bijective}]$$

$$\iff \log(0{,}05) \geq n \log\left(\frac{1499}{1500}\right) \quad [\text{propr. du log}]$$

$$\iff \frac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{1499}{1500}\right)} \leq n \quad \left[\div \log\left(\frac{1499}{1500}\right) \right]$$

qui est négatif !!

$$\iff 4492{,}1 \lessapprox n$$

Réponse : n doit être supérieur ou égal à 4493 personnes