<u>ex 17</u>

a) $E(X) = 0\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}2 = 2{,}6$

b) $E(X) = 98\cdot 0{,}1 + 99\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3 + 101\cdot 0{,}4 = 90{,}1$

c) $E(X) = 1\cdot \frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n} + \dots + n\cdot\frac{1}{n}$

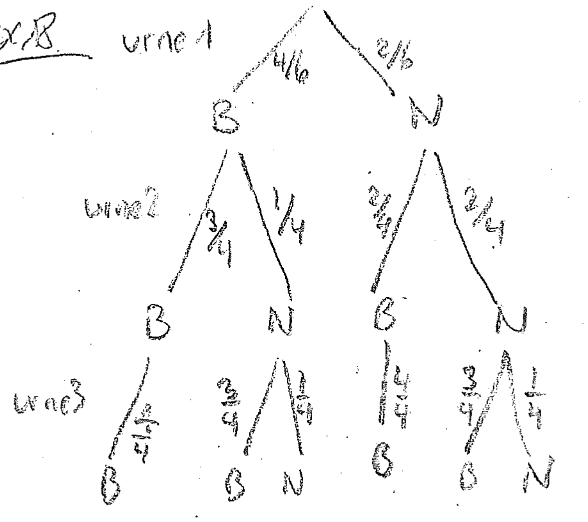
$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$

$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$

$= \frac{n+1}{2}$

cf. formule vue dans le calcul d'intégrale avec la définition

ex 18



X : gain

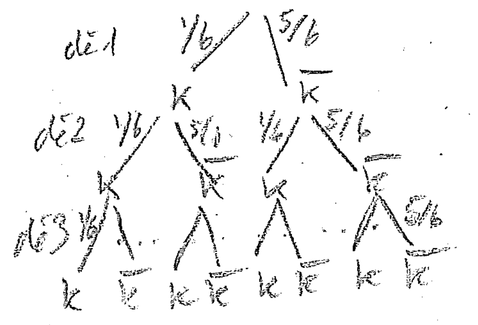
x	1200	-120
ω	N	B
p	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

$$E(X) = 1200 \cdot \frac{1}{12} + (-120)\frac{11}{12}$$
$$= 100 - 110$$
$$= -10.-$$

espérance négative ... pas intéressant de jouer à ce jeu si on pourrait y jouer à de nombreuses reprises...

$$P(N) = \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

ex 19. Soit k le nombre choisi ($k \in \{1;2;\dots;6\}$) et m la mise ($m \geq 0$)



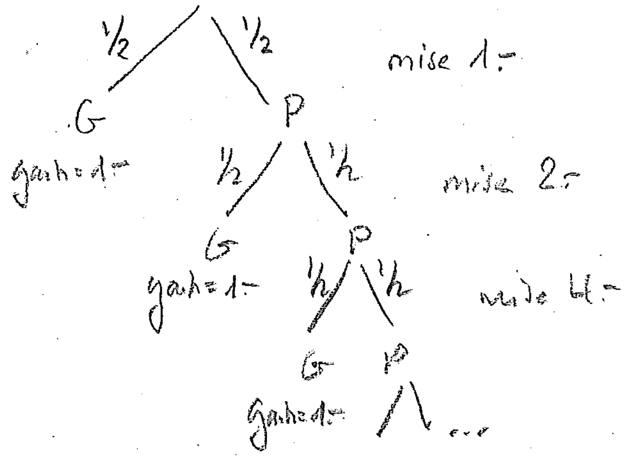
X : gain

x	$-m$	m	$2m$	$3m$
ω	$\bar{k}\bar{k}\bar{k}$	$k\bar{k}\bar{k}$, $\bar{k}k\bar{k}$, $\bar{k}\bar{k}k$	$kk\bar{k}$, $k\bar{k}k$, $\bar{k}kk$	kkk
p	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$3\,\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

$$P(X=3m) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$P(X=2m) = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$$
$$P(X=m) = 3\,\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$$
$$P(X=-m) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$E(X) = -m\left(\frac{5}{6}\right)^3 + m\,3\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} + 2m\,3\,\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3m\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$= \frac{1}{6^3}\left[-125m + 75m + 30m + 3m\right]$$
$$= -\frac{17}{216}m \cong -0{,}08m$$

ex 20 :



X : gain

(a) • S'il n'a que 100.-, il doit arrêter de miser :

mise totale : $1+2+4+8+16+32 = 63.-$

après 6 coups, il ne lui reste que $100 - 63 = 37.-$; il ne peut plus continuer

$P(\text{perdre}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ et $P(\text{gagner}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6$

X :

x	-63	$1.-$
ω	P	G
p	$\frac{1}{2^6}$	$1 - \frac{1}{2^6}$

$$E(X) = -\frac{63}{2^6} + \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)\cdot 1 = -\frac{63}{64} + 1 - \frac{1}{64} = 0.- \,!$$

• Si il a une somme illimitée (et un temps infini !) :

$P(\text{"perdre"}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et $P(\text{"gagner"}) = 1 - 0 = 1$

X :

x	...	1
ω	P	G
p	0	1

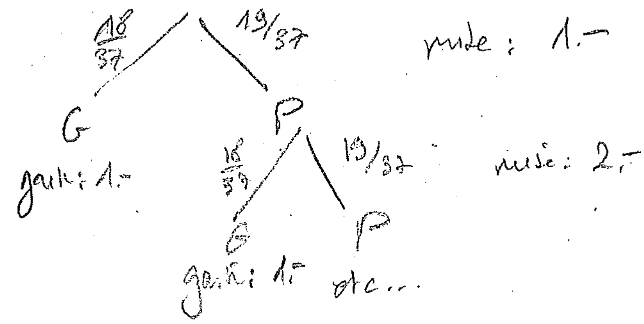
$$E(X) = 1\cdot 1 = 1.-$$

Si il joue beaucoup de fois (un temps "infini"), il gagnera beaucoup !

Remarque : cette façon de jouer est interdite !

ex20 (b)

X : gain



risque 100.-

X : x	-63	$1.-$
ω	P	G
P	$\left(19/37\right)^6$	$1-\left(19/37\right)^6$

$$E(X) = -63\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^6 + 1\cdot\left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^6\right) = 1 - 64\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^6 \simeq -0{,}1735$$

dispose d'une somme illimitée

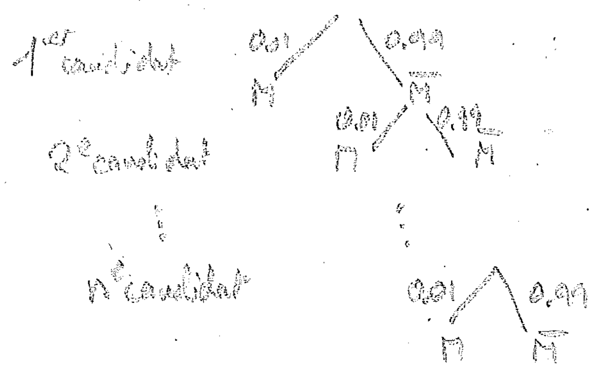
$$P(\text{"Perdre"}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{19}{37}\right)^n = 0$$

$$P(\text{"gagner"}) = 1 - P(\text{"Perdre"}) = 1$$

idem à (a) $E(X) = 1$

ex21 a) Ex individuel : nombre d'analyses = n, d'où $E(X) = n$

Ex groupés : X_n = "nbre d'analyses"



$p(n \text{ candidats } \bar{M}) = 0{,}99^n$

$p(\text{au moins un candidat malade}) = 1 - 0{,}99^n$

X_n :

x	1	n+1
p	$0{,}99^n$	$1-0{,}99^n$

d'où $E(X_n) = 1\cdot 0{,}99^n + (n+1)(1-0{,}99^n)$

$= \cancel{0{,}99^n} + n + 1 - n\,0{,}99^n - \cancel{0{,}99^n}$

$= 1 + n(1-0{,}99^n)$

b) $diff(n) = n - \left(1 + n\left(1-\left(\frac{99}{100}\right)^n\right)\right) = n\cdot 0{,}99^n - 1 = n\cdot e^{\ln 0{,}99^n} - 1$

$diff'(n) = e^{\ln 0{,}99^n} + n\cdot(n\cdot\ln 0{,}99)'\, e^{\ln 0{,}99^n}$

$= e^{\ln 0{,}99^n}\left[1 + n\cdot\ln 0{,}99\right] = 0{,}99^n\,(1 + n\cdot\ln 0{,}99)$

$diff'(n) = 0 \iff n = -\frac{1}{\ln 0{,}99} \cong 99{,}49$

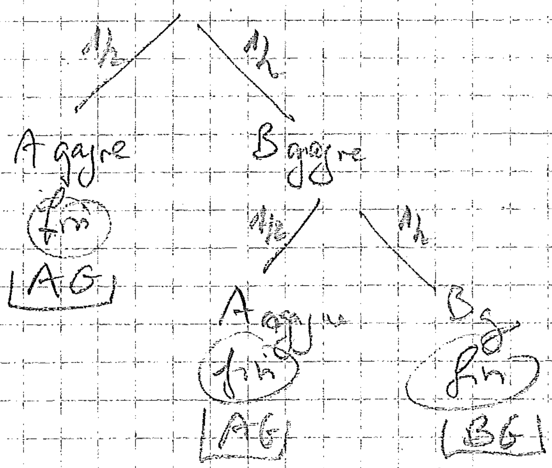
n		$-\frac{1}{\ln 0{,}99}$	
diff'(n)	+	0	−
diff(n)	↗	Max	↘

pour des valeurs entières, le max est atteint soit pour $n = 99$ soit pour $n = 100$:

$diff(99) = 99\cdot 0{,}99^{99} - 1 \cong 35{,}6$

$diff(100) = 100\cdot 0{,}99^{100} - 1 \cong 35{,}6$

Pour 100 personnes, l'économie est de 35,6 ex, donc 35,6 % d'économie ex22   à ce stade du jeu :



X : pistoles pour A

x	0	64
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$E(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 64\cdot\frac{3}{4} = 48$

Y : pistoles pour B

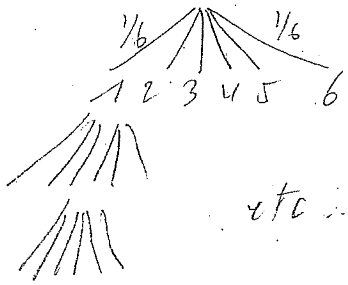
x	0	64
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(Y) = 0\cdot\frac{3}{4} + 64\cdot\frac{1}{4} = 16$

A reprend 48 p. et B 16 p.

Ex 23

Idée 1 :



etc... trop laborieux !

Idée 2 : on pose X = total de 3 dés
puis X_i = résultat du jet i (pour $i = 1,2,3$)

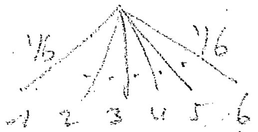
on a : $X = X_1 + X_2 + X_3$

et donc $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3)$ thm $E(X+Y)$

$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

il suffit de calculer ces 3 espérances :

pour X_1 :



x	1	2	3	4	5	6
$f_{X_1}(x) = p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

donc $E(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2}$

$= 3{,}5$ (valeur moyenne pour un dé !)

de même $E(X_2) = E(X_3) = 3{,}5$

d'où $E(X) = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$

ex 24 $X = \#$ urnes vides

on a :

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$p = f_X(x)$			?		?		?			

trop dur de calculer toutes ces prob.

idée : on pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne n° } i \text{ reste vide après la répartition des 10 boules} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$

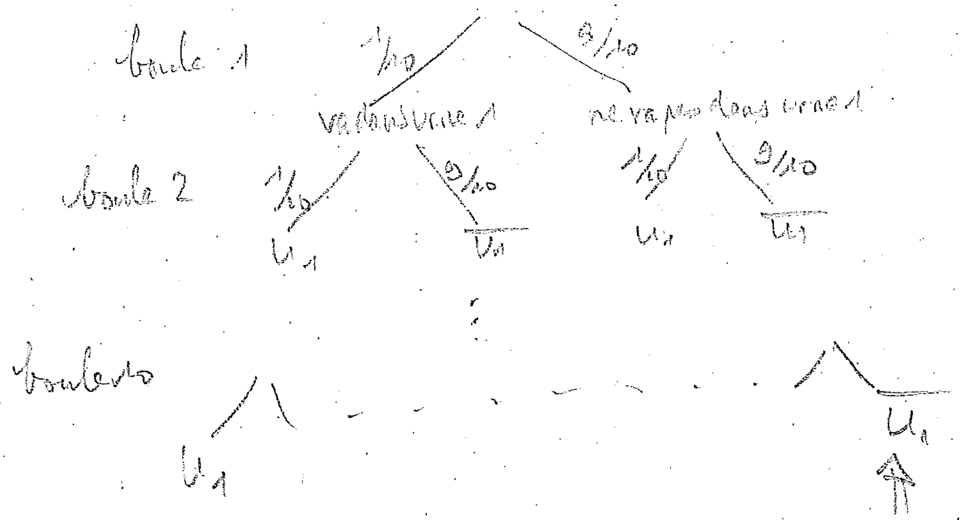
par ex : $X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne 1 reste entièrement vide} \\ 0 & \text{sinon (c.à.d. si il y a au moins une boule dedans)} \end{cases}$

(X_1 compte 1 dans le cas qui nous intéresse)

X_1 :

x	1	0
$p = f_{X_1}(x)$	?	?

pour calculer ces 2 probabilités, on utilise un arbre qui ne s'occupe que de X_1 :



cette issue est la seule où l'urne 1 reste toujours vide

$p = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

donc $p(X_1 = 1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

et donc $p(X_1 = 0) = 1 - p(X_1 = 1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

d'où le tableau :

x	0	1
$p = f_{X_1}(x)$	$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

d'où $E(X_1) = \underbrace{0 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)}_{\text{on n'aurait même pas eu besoin de calculer cette prob !}} + 1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$

On a : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$

d'où $E(X) = E(X_1 + \dots + X_{10}) \overset{\text{lin}}{=} E(X_1) + \dots + E(X_{10}) = 10 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \simeq 3{,}49$

ex 25

- n billets [|]

n° du billet (de 1 à n) visible

face cachée (un n° de 1 à n au hasard)

On pose X = nbre de billets gagnants

Pour $n = 1$: 1 billet $\boxed{1 \mid 1}$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline f_X(x) & 1 \end{array} \qquad E(X) = 1$$

$n = 2$: 2 séries possibles :

$\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 2}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 1}$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline f_X(x) & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad E(X) = 1$$

$n = 3$:

$\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 2}$ $\boxed{3 \mid 3}$ ou $\boxed{1 \mid 1}$ $\boxed{2 \mid 3}$ $\boxed{3 \mid 2}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 1}$ $\boxed{3 \mid 3}$ ou $\boxed{1 \mid 2}$ $\boxed{2 \mid 3}$ $\boxed{3 \mid 1}$ ou $\boxed{1 \mid 3}$ $\boxed{2 \mid 2}$ $\boxed{3 \mid 1}$ ou $\boxed{1 \mid \ }$ $\boxed{2 \mid \ }$ $\boxed{3 \mid \ }$

$X = 3$ $\quad X = 1$ $\quad X = 1$ $\quad X = 0$ $\quad X = 1$ $\quad X = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 3 \\ \hline f_X(x) & 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{array} \Rightarrow E(X) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

⋮

Cas général pour n billets : on pose $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ billet (celui } \boxed{i \mid \dots}\text{) est gagnant} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline f_{X_i}(x) & 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array} \Rightarrow E(X_i) = \frac{1}{n}$$

On a $X = X_1 + \dots + X_n$

$\Rightarrow E(X) = \dots = n \cdot \frac{1}{n} = 1$!

<u>ex 26</u> X_n : coût total = coût panne + coût composantes

$$X_n : \begin{array}{c|c|c} x & 8192+8n & 8n \\ \hline p & & \end{array}$$

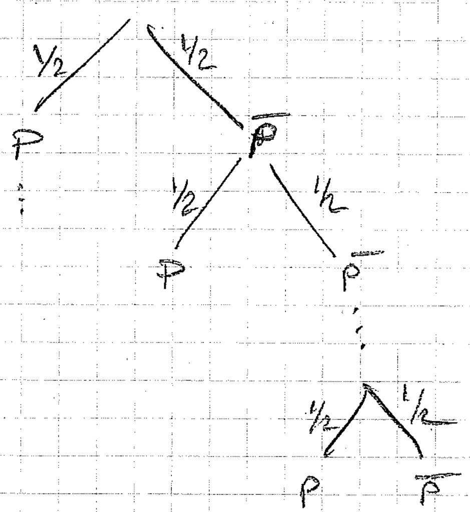
$\underbrace{}_{\text{panne}}$ $\underbrace{}_{\text{pas de panne}}$

composante n°1

composante n°2

⋮

composante n°n



$$p(\text{aucune panne}) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n\text{-fois}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p(\text{au moins une panne}) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d'où : $$X_n : \begin{array}{c|cc} x & 8192+8n & 8n \\ \hline p & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}$$

$$E(X_n) = (8192+8n)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= 8192+8n-8192\left(\frac{1}{2}\right)^n \cancel{- 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

d'où $E'(X_n) = 8 - 8192\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]'$

⚠ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]' \neq n\left[\frac{1}{2}\right]^{n-1}$: ce n'est pas un polynôme, c'est une exponentielle.

$$E'(X_n) = 8 - 8192\left[e^{\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}\right]' = 8 - 8192\, e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n}\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]'$$
$$= 8 - 8192\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left[n \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]'$$
$$= 8 - 8192\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

zeros de $E'(X_n)$: $8 - 8192\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{8}{8192 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln\left[\dfrac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{8}{8192 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 9{,}47$

tableau de signes $E'(X_n)$:

n		9	$\sim 9{,}47$	10	
$E'(X_n)$	$- - - -$		0		$+ + + +$
$E(X_n)$	$\searrow$		min		$\nearrow$

on teste pour $n = 9$ et $n = 10$ pour voir où est le coût minimal : $E(X_9) = 88$

$E(X_{10}) = 88$

on peut mettre 9 ou 10 composantes en parallèle pour minimiser le coût total