ex 50

(a) $X \sim B(10; \frac{1}{2})$ $\qquad P(X=3) = C_3^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$

$\cong 11,72\%$

idem $\quad P(X=4) \cong 20,51\%$

$P(X=5) \cong 24,61\%$

$P(X=6) \cong 20,51\%$

d'où $\quad P(3 \leq X \leq 6) = P(X=3 \text{ ou } X=4 \text{ ou } X=5 \text{ ou } X=6)$

$= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$= \dots =$

ou $\quad P(X \leq 6) - P(X \leq 2) \cong 0,828125 - 0,0546875$

$= 0,7734375 \cong 77,34\%$

(b) $E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

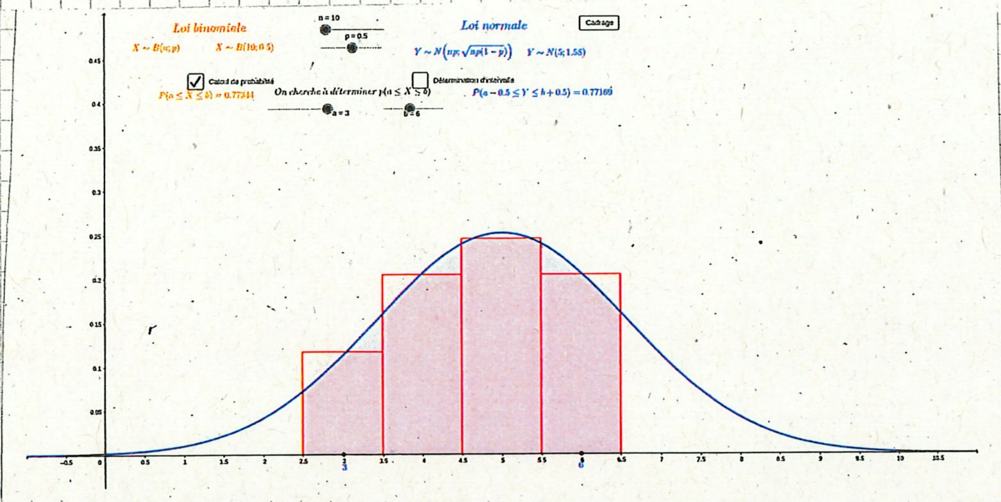
$V(X) = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2,5$

$\sigma(X) = \sqrt{2,5}$

approximation de X par $Y \sim N(\mu; \sigma) = N(5; \sqrt{2,5})$

$P(3 \leq X \leq 6) \cong P(2,5 \leq Y \leq 6,5) \cong 77,17\%$

Int. graphique:



ex51 $X \sim B(100; \frac{1}{2})$

$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

$\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$, donc $Y \sim N(50; 5)$ approxime X

a) $P(X \geq 40) \approx P(Y \geq 39,5) \underset{C}{\approx} 98,21\ \%$

b) $P(40 \leq X \leq 60) \approx P(39,5 \leq Y \leq 60,5) \underset{C}{\approx} 96,43\ \%$

ex53 $X \sim B(120; \frac{1}{6})$

$E(X) = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$

$\sigma(X) = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{50}{3}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, donc $Y \sim N(20; 5\sqrt{\frac{2}{3}})$ approxime X

a) $P(X \leq 18) \approx P(Y \leq 18,5) \underset{C}{\approx} 35,67\ \%$

b) $P(X \leq 14) \approx P(Y \leq 14,5) \underset{C}{\approx} 8,9\ \%$

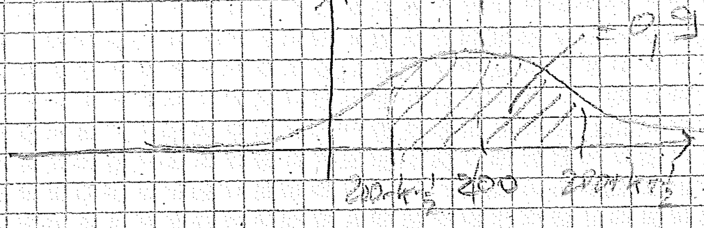
ex55 $X \sim B(400; \frac{1}{2})$

$E(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$

$\sigma(X) = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$, donc $Y \sim N(200; 10)$ approxime X

a) On cherche k tel que : $P(200 - k \leq X \leq 200 + k) = 0,9$

$\Leftrightarrow P(200 - k - \frac{1}{2} \leq Y \leq 200 + k + \frac{1}{2}) = 0,9$



par symétrie

$\Leftrightarrow 2 \cdot P(200 \leq Y \leq 200 + k + \frac{1}{2}) = 0,9$

$\Leftrightarrow P(200 \leq Y \leq 200 + k + \frac{1}{2}) = 0,45$

$\Leftrightarrow P(Y \leq 200 + k + \frac{1}{2}) - \underbrace{P(200 \leq Y)}_{= 0,5} = 0,45$

$\Leftrightarrow P(Y \leq 200,5 + k) = 0,95$

$\Leftrightarrow 200,5 + k \underset{C}{\approx} 216,45 \Leftrightarrow \boxed{k \approx 15,95}$

l'intervalle est $]184,05 ; 215,95[$

<u>ex 55</u> (suite)

b) idem $k = 19,1$ $I = [180,9 ; 219,1]$

c) " $k = 25,3$ $I = [174,7 ; 225,3]$

d) " $k = 32,4$ $I = [167,6 ; 232,4]$

e) " $k = 38,4$ $I = [161,6 ; 238,4]$

ex 52 $X \sim B(500; \frac{1}{2})$

$E(X) = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250$

$\sigma(X) = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ donc $Y \sim N(250; 5\sqrt{5})$ approxime X

(a) $P(-10 \leq X - 250 \leq 10) = P(240 \leq X \leq 260)$

$\cong P(239{,}5 \leq Y \leq 260{,}5) \underset{C}{\cong} 65{,}23\,\%$

(b) $P(-30 \leq X - 250 \leq 30) = P(220 \leq X \leq 280)$

$\cong P(219{,}5 \leq Y \leq 280{,}5) \underset{C}{\cong} 99{,}36\,\%$

ex 54 $X \sim B(n; 1/6)$ n inconnu au départ..

$E(X) = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6}$

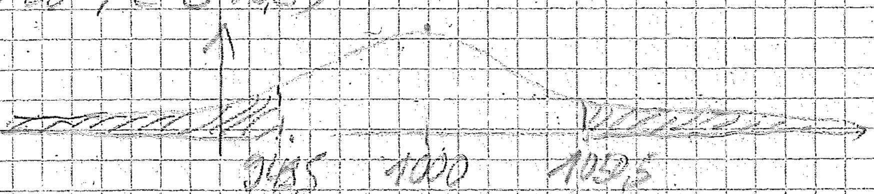
$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5n}{36}} = \frac{\sqrt{5n}}{6}$, donc $Y \sim N\left(\frac{n}{6}; \frac{\sqrt{5n}}{6}\right)$ approxime X

(a) on fixe $n = 6000$: $E(X) = \frac{6000}{6} = 1000$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{30000}}{6} = \frac{100\sqrt{3}}{6} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$

$P(X \geq 1000 + 50$ ou $X \leq 1000 - 50)$

$\cong P(Y \geq 1000 + 50 + 0{,}5$ ou $Y \leq 1000 - 50 - 0{,}5)$

$= P(Y \geq 1050{,}5$ ou $Y \leq 949{,}5)$



par symétrie

$\cong 2 \cdot P(Y \leq 949{,}5)$

$\underset{C}{\cong} 2 \cdot 0{,}04 = 8\,\%$

(b) idem avec $n = 60000$: $P(X \geq 10050{,}5$ ou $X \leq 9949{,}5)$

$\cong \ldots \cong 2P(Y \leq 9949{,}5)$, avec $Y \sim N\left(10000; \frac{\sqrt{300000}}{6}\right)$

$\cong 2 \cdot 0{,}29 = 58\,\%$

ex 56. $X \sim B(327; 0,95)$ approximée par $Y \sim N(\mu; \sigma)$

$E(X) = 327 \cdot 0,95 = 310,65 = \mu$

$\sigma(X) = \sqrt{327 \cdot 0,95 \cdot 0,05} = \sigma$

a) $P(X \le 320) \cong P(Y \le 320,5) \underset{c}{=} 99,38\%$

b) le risque est de $1 - 0,9938 = 0,62\%$ environ

c) Idem pour $n = 330$: $p \cong 96,15\%$

$n = 335$: $p \cong 71,36\%$ le risque augmente beaucoup !!

d) ⚠ prob. conditionnelle !

$$P(X \le 320 \mid X \ge 310) = \frac{P(310 \le X \le 320)}{P(X \ge 310)}$$

$$\cong \frac{P(309,5 \le Y \le 320,5)}{P(Y \ge 309,5)} \underset{c}{=} \frac{0,6085558209}{0,6147778076} \cong 98,99\%$$

ex 57. $X \sim B(n; 0,8)$

$E(X) = 0,8n$

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{0,16n} = 0,4\sqrt{n}$; $Y \sim N(0,8n; 0,4\sqrt{n})$ approxime X

$P(X \le 192) = P(Y \le 192,5)$

on accepte $P(X \le 192) = 1 - 0,0228 = 0,9772$

$\Leftrightarrow P(Y \le 192,5) = 0,9772$

⚠ on ne peut pas avoir de variable dans le calcul avec la calculatrice

$\Rightarrow$ on "centre-réduit" : $Z = \frac{Y - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0;1)$

càd : $P(Y \le 192,5) = 0,9772$

$$\Leftrightarrow P\Big(\underbrace{\frac{Y - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}}_{\sim N(0;1)} \le \frac{192,5 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\Big) = 0,9772$$

d'où $\frac{192,5 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} \cong 2$ avec la calculatrice pour $N(0;1)$

ex 57 (suite)

c.à.d $192,5 - 0,8n = 2 \cdot 0,4\sqrt{n}$

on élève au carré

$\Leftrightarrow 37056,25 - 308n + 0,64n^2 = 0,64n$

$\Leftrightarrow 0,64n^2 - 308,64n + 37056,25 = 0$

$\Delta = 334,6496$

$$n_{1,2} = \frac{308,64 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0,64} \quad \begin{array}{l} \nearrow n_1 \approx 256,64 \\ \searrow n_2 \approx 225,6 \end{array}$$

Comme on a élevé au carré, il faut vérifier ces solutions :

$0,64(n_1)^2 - 308,64n_1 + 37056,25 \neq 0$: n_1 n'est pas solution

$0,64(n_2)^2 - 308,64n_2 + 37056,25 = 0$: n_2 est solution

Conclusion : il peut accepter jusqu'à 225 personnes.