

Théorème de la variance

Si X est une variable aléatoire, alors $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Démonstration :

Représentons cette situation ainsi : $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f_x} [0; 1]$
 $\omega \rightarrow x \rightarrow p$

avec

$X :$	x	x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	x_n
	$f_x(x) = p(X=x) = p$	p_1	p_2	\dots	p_{n-1}	p_n

d'où : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$, car [ARG 1 :]

Posons $E(X) = \mu$ pour simplifier l'écriture.

On a : $V(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$, car

[ARG 2 :]

$$= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2 \cdot \mu \cdot x_i + \mu^2) \cdot p_i, \text{ car}$$

[ARG 3 :]

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot \mu \cdot x_i \cdot p_i + \mu^2 \cdot p_i, \text{ car}$$

[ARG 4 :]

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \sum_{i=1}^n 2 \cdot \mu \cdot x_i \cdot p_i + \sum_{i=1}^n \mu^2 \cdot p_i, \text{ car}$$

[ARG 5 :]

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i + \mu^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i, \text{ car}$$

[ARG 6 :]

$$= E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot E(X) + \mu^2 \cdot 1, \text{ car}$$

[ARG 7.1 :]

[ARG 7.2 :]

[ARG 7.3 :]

$$= E(X^2) - 2 \cdot \mu^2 + \mu^2, \text{ car}$$

[ARG 8 :]

$$= E(X^2) - \mu^2$$

cqfd