Formule d'addition de deux angles

Pour tous réels *a* et *b*, on a :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

Démonstration

On représente la situation sur un cercle trigonométrique pour le cas $b \geq a$:

On considère les deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

On a :

- $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\|\|\vec{OB}\|\cos(b-a)$

  [ARG 1 : ....]

  $= \cos(b-a)$

  [ARG 2 : ....]

et

- $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$

  [ARG 3 : ....]

  $= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

  [ARG 4 : ....]

d'où : $\cos(b-a)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

[ARG 5 : ....]

Si $a > b$: $\cos(b-a) = \cos(-(a-b))$

[ARG 6 : ....]

et

$= \cos(a-b)$

[ARG 7 : ....]

$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

[ARG 8 : ....]

Enfin : $\cos(b+a) = \cos(b-(-a))$, pour tous a et b réels

$= \cos(b)\cos(-a) + \sin(b)\sin(-a)$

[ARG 9 : ....]

$= \cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a)$

[ARG 10 : ....]

On passe au sinus :

$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b))$

[ARG 9 : ....]

$= \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(b)$

[ARG 10 : ....]

$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

[ARG 11 : ....]

De façon semblable : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Théorème de De Moivre

Pour tout réel x et pour tout entier relatif n, on a :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

Démonstration

Pour $n\in\mathbb{N}$, on démontre par récurrence :

Cas $n=0$: $(\cos(x)+i\sin(x))^0\overset{?}{=}\cos(0x)+i\sin(0x)$

$\Leftrightarrow 1\overset{?}{=}1+i\cdot 0=1$

Supposons la formule vraie pour un n donné :(HR : hypothèse de récurrence)

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

Démontrons qu'alors elle l'est aussi pour $n+1$:

$$(\cos(x)+i\sin(x))^{n+1}\overset{?}{=}\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x)$$

dém : $(\cos(x)+i\sin(x))^{n+1}=(\cos(x)+i\sin(x))^n\cdot(\cos(x)+i\sin(x))$

[ARG 1 : ....]

$$=(\cos(nx)+i\sin(nx))\cdot(\cos(x)+i\sin(x))$$

[ARG 2 : ....]

$$=([\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x)]+i[\cos(nx)\sin(x)+\sin(nx)\cos(x)])$$

[ARG 3 : ....]

$$=\cos(nx+x)+i\sin(nx+x)$$

[ARG 4 : ....]

$$=\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x)$$

[ARG 5 : ....]

Reste à démontrer le cas $n\in\mathbb{Z}_-^*$:

$(\cos(x)+i\sin(x))^n=(\cos(x)+i\sin(x))^{-m}$, avec $m\in\mathbb{N}^*$

[ARG 6 : ....]

$$=\frac{1}{\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^{m}}$$

[ARG 7 : ....]

$$=\frac{1}{\left(\cos(mx)+i\sin(mx)\right)}$$

[ARG 8: ....]

$$=\frac{1}{\left(\cos(mx)+i\sin(mx)\right)}\cdot\frac{\left(\cos(mx)-i\sin(mx)\right)}{\left(\cos(mx)-i\sin(mx)\right)}$$

[ARG 9: ....]

$$=\frac{\cos(mx)-i\sin(mx)}{\cos^{2}(mx)+\sin^{2}(mx)}$$

[ARG 10 : ....]

$$=\cos(mx)-i\sin(mx)$$

[ARG 11 : ....]

$$=\cos((-n)x)-i\sin((-n)x)$$

[ARG 12 : ....]

$$=\cos(nx)+i\sin(nx)$$

[ARG 13 : ....]

Remarque : interprétation exponentielle

$$\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^{n}=\cos(nx)+i\sin(nx)\Leftrightarrow\left(e^{ix}\right)^{n}=e^{inx}$$