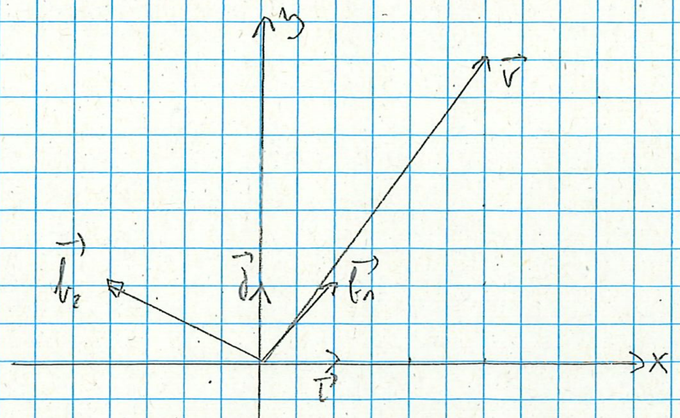
Act2 $\boxed{1}$



(a) $\vec{b_1} \neq \lambda \vec{b_2}$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$, donc tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$: c'est ce qui caractérise une base du plan.

(b) dans $C(\vec{i};\vec{j})$: $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ [c'est l'écriture "naturelle" et implicite]

dans $B(\vec{b_1};\vec{b_2})$: on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha - 2\beta\\ \alpha + \beta\end{pmatrix}$ (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha - 2\beta \\ 4 = \alpha + \beta \end{cases}$

$-$: $1 = 3\beta$

$\beta = 1/3$, puis $\alpha = 4 - \beta = 11/3$

donc $\vec{v} = \frac{11}{3}\vec{b_1} + \frac{1}{3}\vec{b_2}$, càd $\vec{v}\begin{pmatrix}11/3\\1/3\end{pmatrix}_B$

rem: on peut vérifier graphiquement...

(c) On réécrit (*) avec une matrice : $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_B$ (*)

rem: on peut vérifier que $\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11/3\\1/3\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$!

et on observe que : $\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{\text{composantes de } \vec{v} \text{ dans la base } C} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}}_{\text{vecteurs de } B \text{ écrits dans la base } C} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_B}_{\text{composantes de } \vec{v} \text{ dans la base } B}$

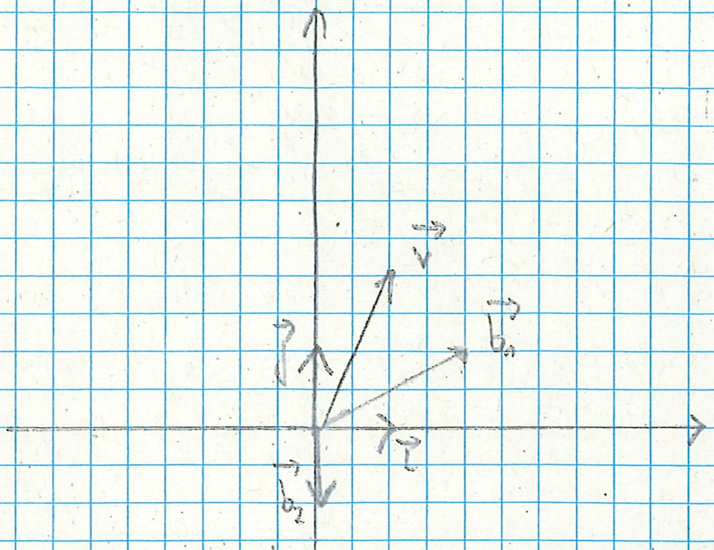
déf : matrice de passage de B vers C, notée P_{BC} ou P

on a aussi : $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_B = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}}_{} \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

matrice de passage de C vers B, notée P_{BC}^{-1} ou P^{-1}

on peut vérifier : $P^{-1} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11/3\\1/3\end{pmatrix}_B$

$\boxed{2}$



(a) P_{CB} : matrice de changement de base de B vers C [⚠ notation "à l'envers"]

on a : $\underbrace{\vec{b_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{b_2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{dans } C}$ donc $\underbrace{P_{CB} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}}_{\text{vect. de B dans C}} = P$ [la plus facile à déterminer]

$$P_{BC} = P_{CB}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix} = P^{-1}$$

(b) $P_{BC}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-3/2\end{pmatrix}_B$ càd $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b_1} - \frac{3}{2}\vec{b_2}$

vérif : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ✓

(c)

$$\begin{tikzcd}
\text{base } B \arrow[d, shift left, "P_{CB}=P"] & & \text{base } B \\
\text{base } C \arrow[u, shift left, "P^{-1}=P_{BC}"] & & \text{base } C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "L"] \arrow[rr, bend left=60, "M_{BB}(L)"] \arrow[rr, bend right=60, "M_{CC}(L)"'] & & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{base } B \arrow[d, shift left, "P_{CB}=P"] \\
\text{base } C \arrow[u, shift left, "P^{-1}=P_{BC}"]
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{P_{BC}\cdot M_{CC}(L)\cdot P_{CB}}_{⚠ \text{ "de droite à gauche"}} = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$ (on note aussi : P^{-1}

$= \begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$= M_{BB}(L)$: c'est la matrice de L dans la base B à la source et au but ; on la note $M_{BB}(L)$)

remarque : $P_{CB}\cdot M_{BB}(L)\cdot P_{BC} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix} = M_{CC}(L)$

(d) $M_{BB}(L)\cdot\vec{v}_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2\\ -3/2\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1/2\\ 3/2\end{pmatrix}_B$

càd :

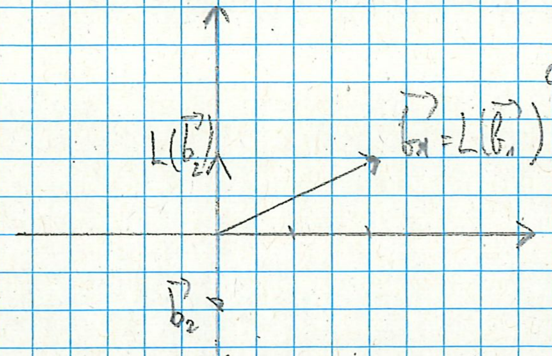
$$L(\vec{v}_B) = \begin{pmatrix}1/2\\ 3/2\end{pmatrix}_B = \tfrac{1}{2}\cdot\vec{b_1} + \tfrac{3}{2}\cdot\vec{b_2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}_C$$

$$M_{CC}(L)\cdot\vec{v} = M_{CC}(L)\cdot\vec{v_C} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}_C$$

e) $M_{BB}(L)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}_B$



càd $M_{BB}(L)\cdot\vec{b_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}_B$

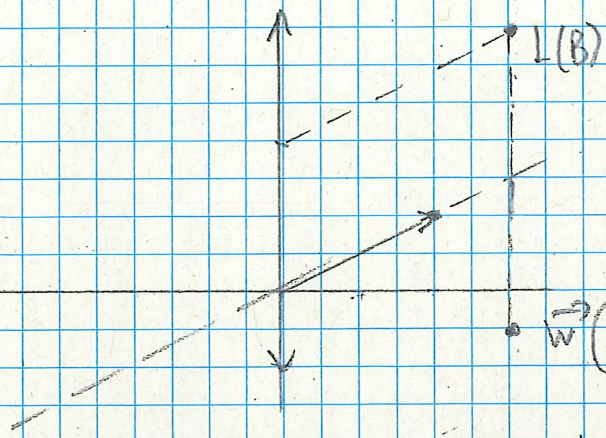
$M_{BB}(L)\cdot\vec{b_2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}_B$

L, dans le référentiel B

fixe $\vec{b_1}$ et envoie $\vec{b_2}$ sur son opposé

version pour vérifier en restant dans C : $L\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$



$\vec{w}\begin{pmatrix}1,5\\ -2\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}3\\ -0,5\end{pmatrix}_C$

dans B : $L(B) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,5\\ -2\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1,5\\ 2\end{pmatrix}_B$

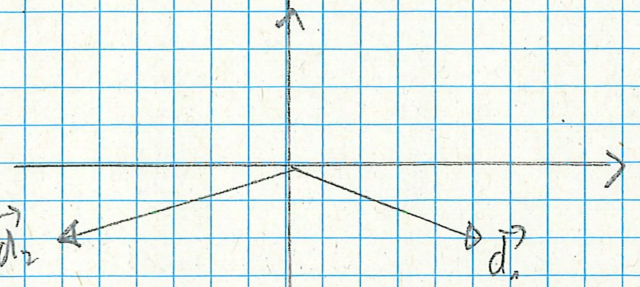
L fige la 1re composante (dans B)

et envoie la 2e sur son opposé

(Vérif : $L\begin{pmatrix}3\\ -0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 3,5\end{pmatrix}$

L est une "symétrie"

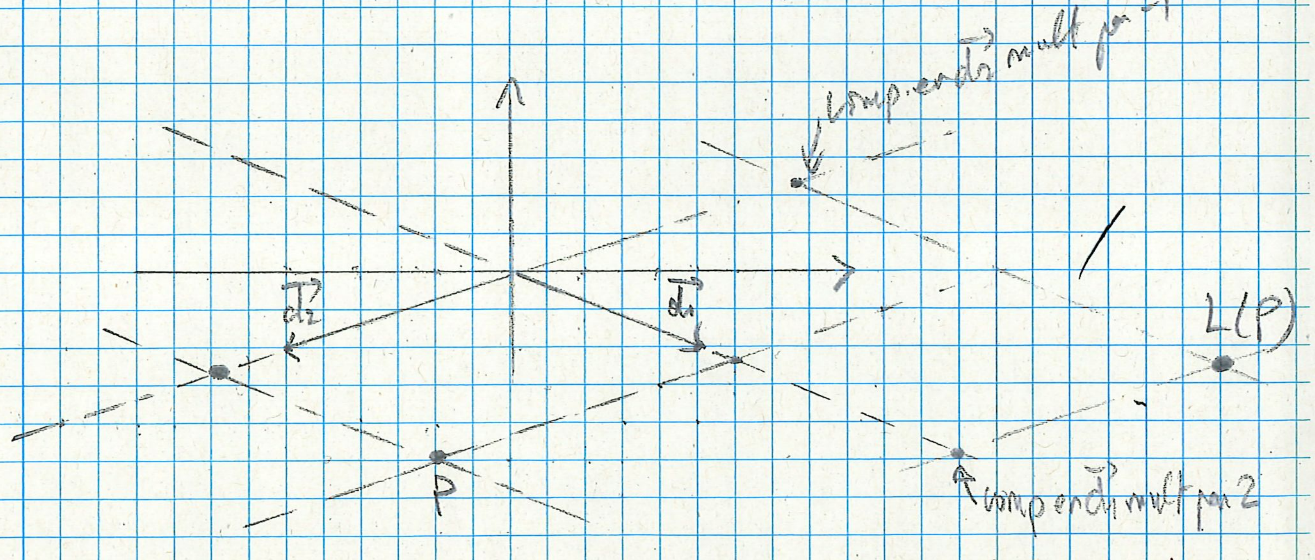
Si on généralise et qu'on ait une base $D(\vec{d_1}\,;\,\vec{d_2})$ telle que $M_{DD}(L)$ soit diagonale, par exemple $M_{DD}(L) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$



cela signifie que $L(\vec{d_1}) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}_D$

$$L(\vec{d_2}) = L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_D$$

L multiplie la composante en $\vec{d_1}$ par 2
" " " " $\vec{d_2}$ par -1



On "voit" mieux L en la "regardant" selon B

Cela nous amène à définir les notions de

- valeur propre de L
- vecteur propre de L
- diagonalisation de L