

Aut 6

$$(a) \begin{cases} 0,8 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,55 \\ 0,2 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

$$b) T \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,575 \\ 0,425 \end{pmatrix}$$

$$c) T^5 \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \dots \text{ laborieux}$$

$$d) P_T(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0,8 & -0,3 \\ -0,2 & \lambda - 0,7 \end{vmatrix} = (\lambda - 0,8)(\lambda - 0,7) - 0,06 \\ = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 \\ = (\lambda - 1)(\lambda - 0,5)$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 0,3y = x \\ 0,2x + 0,7y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,3y = 0 & + 2x = 3y \\ 0,2x + 0,3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ss esp propre: } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}: \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e) \text{ Base propre } B \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad P = P_{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P_{BC} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB}(L) = P^{-1} \cdot T \cdot P$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 0,5 & 1 \cdot 0,5 \\ 2 \cdot 0,5 & -1 \cdot 0,5 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou direct via les val propres: } M_{BB}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$f) T^5 = P \cdot M_{BB}^5(L) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 49/10 & 93/160 \\ 31/80 & 67/160 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4,9/10 & 9,3/160 \\ 3,1/80 & 6,7/160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6125 & 0,58125 \\ 0,3875 & 0,41875 \end{pmatrix}$$

$$T^n = P \cdot M_{BB}^n(L) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1/2^n \\ 2 & -1/2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 - 2/2^n & 3 - 3/2^n \\ 2 - 2/2^n & 2 - 3/2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 - 0,4/2^n & 0,6 - 0,6/2^n \\ 0,4 - 0,4/2^n & 0,4 - 0,6/2^n \end{pmatrix} \quad \checkmark$$