ex3 (a) base $B_1 = C = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \Rightarrow M_{CB_1} = P = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ chgmt de base de B_1 à C

$\Rightarrow M_{B_1C} = P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ " " " C à B_1

donc $P^{-1}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{B_1}$ écriture de $\vec{u}$ ds B_1

$P^{-1}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{B_1}$ " " $\vec{v}$ " "

$P^{-1}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}_{B_1}$ " " $\vec{w}$ " "

base $B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right) \Rightarrow M_{CB_2} = P = \begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}$ chgmt de base de B_2 à C

$\Rightarrow M_{B_2C} = P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}$ " " C à B_2

donc $P^{-1}\vec{u} = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1/3\end{pmatrix}$

$P^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2/3\end{pmatrix}$

$P^{-1}\vec{w} = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-7/3\end{pmatrix}$

base $B_3 = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) \Rightarrow M_{CB_3} = P = \begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$ chgmt de base de B_3 à C

$\Rightarrow M_{B_3C} = P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ " " " " C à B_3

donc $P^{-1}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$P^{-1}\cdot\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$P^{-1}\cdot\vec{w} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-10/3\end{pmatrix}$

(b)

$$\begin{tikzcd} \text{base } C \arrow[dd, bend left, "P^{-1}"] & & \text{base } C \arrow[dd, bend left, "P^{-1}"] \\ \vec{v} \arrow[rr, "L"] \arrow[rr, bend left, "M_{CC}(L)"] \arrow[rr, bend right, "M_{BB}(L)"'] & & L(\vec{v}) \\ \text{base } B \arrow[uu, bend left, "P"] & & \text{base } B \arrow[uu, bend left, "P"] \end{tikzcd}$$

pour B_1 : $P^{-1}\cdot M_{CC}\cdot P\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vec{v}$

$= \begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}\vec{v}$

donc $M_{BB}(L) = \begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}$

pour B_2 : $P^{-1}\cdot M_{CC}\cdot P = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

pour B_3 : $P^{-1}\cdot M_{CC}\cdot P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3&4/3\\-4/3&11/3\end{pmatrix}$

<u>ex 4</u> (a) $\left.\begin{array}{l}\vec{a_1} \neq 2\vec{a_2} \\ \vec{b_1} \neq 2\vec{b_2}\end{array}\right\} \Rightarrow B_1$ et B_2 sont des bases de $\mathbb{R}^2$

i) $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ chgmt de base de B_1 à C

ii) $P_2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ " " " " B_2 à C

iii) $P_1^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de C à B_1

iv) $P_2^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ de C à B_2

v) de B_1 à B_2 : de B_1 à C puis de C à B_2

soit $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{⚠ \text{ à l'ordre } P_2^{-1} \cdot P_1(\vec{v})} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix} = P_3$

vi) de B_2 à B_1 = $P_3^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique

dans B_1 : $P_1^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$ avec la matrice

ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + 5\beta \\ 1 = \alpha + 3\beta \quad |\cdot 2| \end{cases}$

$-1 = -\beta$

$\beta = 1$, puis $\alpha = -2$

dans B_2 : $P_2^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}_{B_2}$

ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7\alpha + 4\beta \\ 1 = 2\alpha + \beta \quad |\cdot(-4)| \end{cases}$

$-3 = -\alpha$

$\alpha = 3$, puis $\beta = -5$