ex7 On a dans l'ex 5 déjà déterminé val. et vect. propres

a) 2 val. propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$ et $\vec{v_1}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vect. pr. associés

donc $B\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base dans laquelle la matrice

sera diagonale : $P = M_{CB} = \begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$

$$P^{-1} = M_{BC} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\text{et } M_{BB}(L) = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 1\\8 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0\\0 & 20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$$ la matrice diagonale formée des valeurs propres

b) pas de val. propres / non diagonalisable

c) $\lambda_1 = 1$ $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 5$ $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ } base propre $B(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ et $M_{BB}(L) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$

d) $\lambda = 2$ unique val. propre ; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vecteur propre

non diagonalisable

rem : $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ ne peut être la diagonalisation : on aurait

on aurait $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = 2x\\2y = 2y\end{cases}$ s. esp. pr $= \mathbb{R}^2$

et aussi $P_{CB} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ mais P^{-1} $\nexists$!!

un autre vect. pr. ? $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$

e) idem b)

f) idem a) et c) base propre $B\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $M_{BB}(L) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

ex8

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $M_L = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = M_{cc}(L)$

(a)
(b) $L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 5$

$L\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 3$

(c) $B = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)$ base propre

$P = M_{CB} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = M_{BC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & -3/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

(d) $D = M_{BC}\cdot M_{CC}(L)\cdot M_{CB} = P^{-1}\cdot M_{cc}(L)\cdot P$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 9\\-5 & -3\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 0\\0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

(e) $M_L^2 = (M_{cc}(L))^2 = \begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & -24\\8 & 33\end{pmatrix}$

et $(M_{cc}(L))^2 = P\cdot M_{BB}^2(L)\cdot P^{-1}$

$\Leftrightarrow (M_L)^2 = P\cdot D^2\cdot P^{-1}$

$= \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}^2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}25 & 27\\-25 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -48\\16 & 66\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -46\\8 & 33\end{pmatrix}$

(f) $M_L^5 = P\cdot D^5\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5^5 & 0\\0 & 3^5\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1198 & -4323\\1441 & 4566\end{pmatrix}$

ex 9 $M_L = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-2y\\-x+y\end{pmatrix}$

(b) $\det(M_L) = 2\cdot 1 - (-1)(-2) = 0$

(c) non, L n'est pas bijective ; par ex. $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

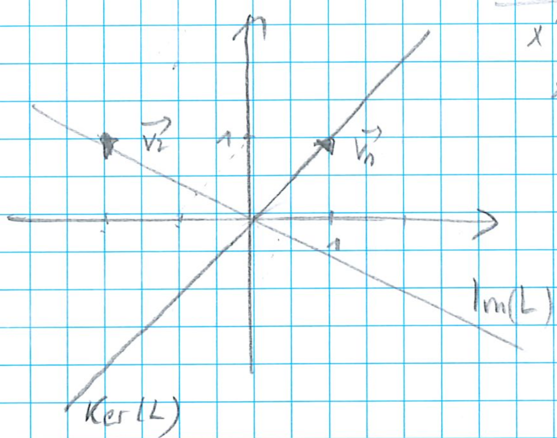
(d) $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\-x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y$

$\mathrm{Ker}(L) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x=y\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

(e) $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-2y\\-x+y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = 2x-2y\\ y' = -x+y\end{cases} \; |2|$

$x'+2y'=0$

$x'=-2y'$



$\mathrm{Im}(L) = \left\{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \mid x'=-2y'\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}-2y'\\y'\end{pmatrix} \mid y'\in\mathbb{R}\right\}$

$= \left\{y'\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \mid y'\in\mathbb{R}\right\}$

(f) $P_L(\lambda) = |\lambda I - M_L| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 2\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-2 = \lambda^2-3\lambda$

(g) $\lambda^2-3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)=0$

$\lambda=0$ et $\lambda=3$: valeurs propres

$\lambda_1=0$: $M_L\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ → voir (d) : $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre (ss-esp propre est Ker(L))

$\lambda_2=3$: $M_L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y=3x\\-x+y=3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-2y=0\\-x-2y=0\end{cases}$

ss-espace propre : $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x+2y=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\} = \left\{y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}$

par ex $\vec{v_2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ vect propre

(h) base propre : $B = (\vec{v_1} ; \vec{v_2}) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$

$M_{BB}(L)$: $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

donc $M_{BB}(L) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

ou $B = \left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \Rightarrow M_{BB}(L) = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

ex. $\begin{pmatrix}3v\\0v\end{pmatrix}$(