PRÉRÉQUIS SUR LES SUITES

Théorème

Toute suite monotone et bornée converge.
Toute suite convergente est bornée.

SÉRIES DE RÉFÉRENCE À CONNAÎTRE

1 Les séries géométriques $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot r^n = a \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ convergent vers $\frac{1}{1-r} \Leftrightarrow |r| < 1$

2 La série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

3 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge vers 1

4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge vers $s \leq 2$ (en fait vers $\frac{\pi^2}{6}$)

5 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge vers $s \leq 3$ (en fait vers e)

TOUS LES CRITÈRES

Théorème « Critère de divergence »

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ une série.

Si $\lim_{k \to \infty} |u_k| \neq 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est divergente.

Contraposée : Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente, alors $\lim_{k \to \infty} |u_k| = 0$.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k^2+1}$ converge-t-elle ?

$\lim_{k \to \infty} |u_k| = \lim_{k \to \infty} \frac{3k^2}{k^2+1} = 3$, donc la série diverge

SÉRIES ALTERNÉS

Théorème « Critère de convergence d'une série alternée »

Soit une série alternée $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ où $b_k \geq 0$ telle que :

- ☐ $0 < b_{k+1} < b_k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$
- ☐ $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

alors la série est convergente.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge-t-elle ?

On a : $b_k = \frac{1}{k} \geq 0$, $0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ et $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, donc $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

SÉRIES À TERMES POSITIFS

Théorème « Critère de comparaison »

Supposons que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ soient des séries à termes positifs.

- ☐ si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est convergente et $u_k \leq v_k,\ \forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.
- ☐ si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est divergente et $u_k \geq v_k,\ \forall\, k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ converge-t-elle ?

On a :

- ☐ $\frac{1}{k!} \geq 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$
- ☐ $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k-1)\cdot k \geq 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots 2\cdot 2$, donc $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$

Or on sait que $\sum_{k=1}^{\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$, donc $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} \leq 2$

Théorème « Convergence des séries de Riemann »

Une série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}$, $a \in \mathbb{R}$ diverge si $a \leq 1$ et converge si $a > 1$.

Exemple : le série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge-t-elle ?

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann pour a = 0.5 ; donc elle diverge.

Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ à termes positifs, càd $u_k \geq 0, \forall k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = c$.

☐ Si c < 1, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

☐ Si c > 1, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si c = 1, le test ne donne aucune information.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k!}$ converge-t-elle ?

$c = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{2k+3}{2k+1} \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{2k+3}{2k+1} \frac{1}{k+1} = 0$, donc la série converge.

Théorème « Critère de la racine (ou critère de Cauchy) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ à termes positifs, càd $u_k \geq 0, \forall k$ et la limite $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{u_k} = c$.

☐ Si c < 1, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

☐ Si c > 1, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si c = 1, le test ne donne aucune information.

Exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ converge-t-elle ?

$c = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$, donc la série converge.

Théorème « Critère de l'intégrale »

Soit f une fonction continue, positive et jamais croissante dans l'intervalle $[p; +\infty[$ et soit $u_k = f(k)$. Alors la série $\sum_{k=p}^{\infty} u_k$ converge ou diverge, selon que $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou non.

De plus : $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=p}^{\infty} u_k \leq u_p + \int_p^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exemple : appliquer le critère de l'intégrale à la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

On a $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$: la série converge entre 1 et 2.

SÉRIES QUELCONQUES

Théorème « Critère de convergence absolue »

Si une série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ converge-t-elle ?

Selon le critère : $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ qui converge, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ converge.

Théorème « Critère du quotient (ou critère de D'Alembert) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et la limite $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = c$.

☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.

Exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\,!}$ converge-t-elle ?

$c = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{2k+3}{2k+1} \frac{k\,!}{(k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+3}{2k+1} \frac{1}{k+1} = 0$, donc la série converge.

Théorème « Critère de la racine (ou critère de Cauchy) »

On considère la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et la limite $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = c$.

☐ Si $c < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est absolument convergente et donc la série converge.

☐ Si $c > 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

☐ Si $c = 1$, le test ne donne aucune information.