Théorème « Formule d'Euler »

Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Démonstration

Le développement en série de la fonction exp de la variable réelle x est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

car [ARG 1 : ..dev. MacLaurin et étude du reste (vu au cours)....]

On peut l'étendre à tout nombre complexe z : ce développement en série de Taylor complexe reste absolument convergent et définit l'exponentielle complexe (tout ceci sans justification ici …) :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^k}{k!} + \ldots,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

On pose $z = i\theta$ avec θ réel :

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots + \frac{(i\theta)^k}{k!} + \ldots$$

car [ARG 2 : ...substitution...]

$$= 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots + \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \ldots + i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots + \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

car [ARG 3 : ..réorg. des termes ⚠ ok ici [sans doute] mais pas toujours...........]

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

$$+ i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots + i(-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

car [ARG 4 : ....$i^2 = -1$ / $i^3 = -i$ / $i^4 = 1$..]

Or on sait que : $\sin(\theta)=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-...+(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+...$ et $\cos(\theta)=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-...+(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}+...$

car [ARG 5 : ...dev. Taylor/McLaurin et étude reste (vu au cours)....]

d'où : $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

car [ARG 6 : ...Substitution....]

En posant $\phi=\pi$, on obtient ce que beaucoup considèrent comme la plus belle formule des mathématiques :

$$e^{i\pi}+1=0$$

car [ARG 7 : ...cos(π) = −1 sin(π) = 0 (+) on soustrait −1....]